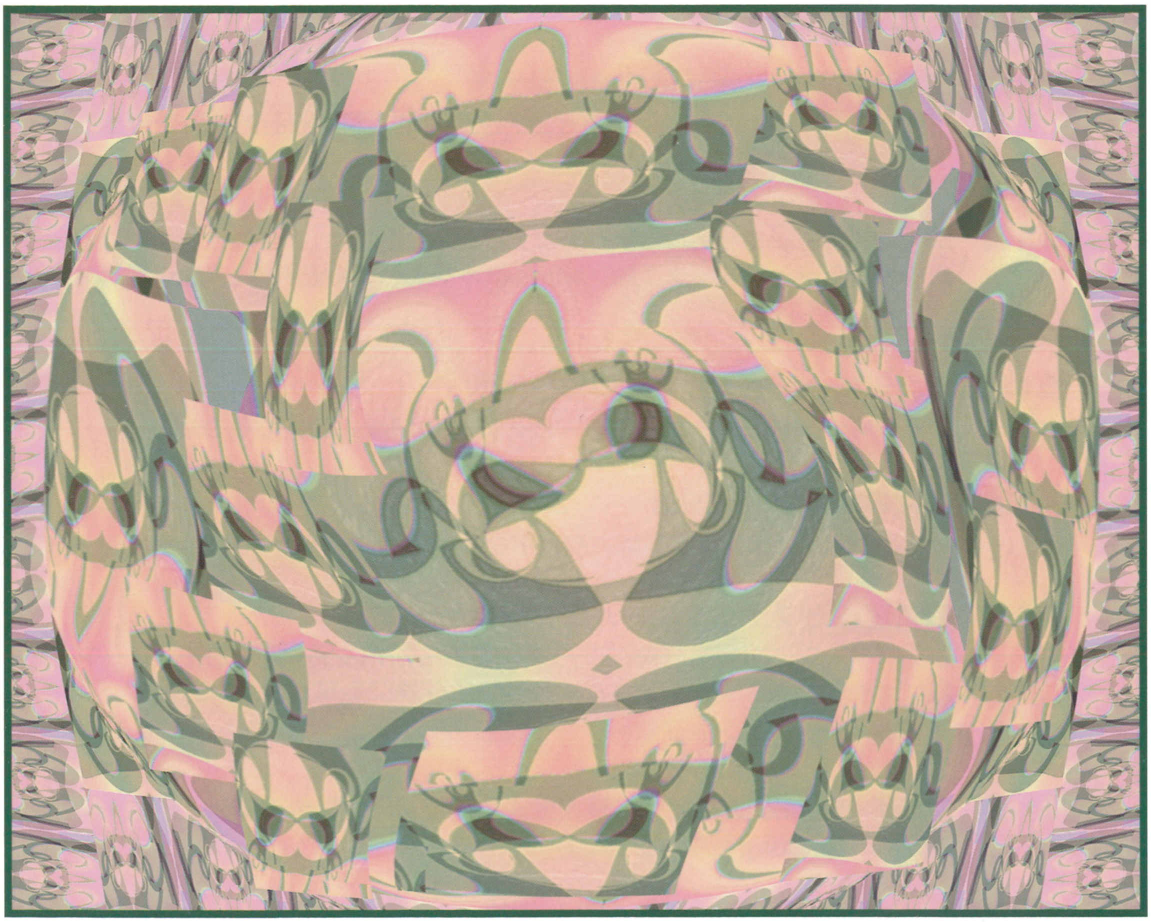
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
ISSN 0386—2240
2014年10月1日発行　第52巻10号　毎月1回1日発行

数理科学

10
2014

特集 複素解析の視点
遍在する複素関数

複素解析の魔力　大沢 健夫
複素代数幾何学の美学　辻 元
複素数で表す極小曲面　宮岡 礼子
複素関数の微積分からリーマン面のモジュライ空間へ　タイヒミュラー空間論への道すじ　藤川 英華
ブラウン運動と複素解析　厚地 淳
複素数とシュレディンガー方程式　中村 周
整数論における複素解析的方法　松本 耕二
多変数関数論における解析接続　神本 丈
［コラム］葉山シンポジウムの思い出　多変数複素解析の国際研究集会をめぐって　野口潤次郎
《連載》大学院入試問題からみた大学の数学 その17　海老原 円・太田 雅人
微分方程式を考える その3　小澤 徹
《フィールズ賞で語る現代数学》第2回　渕野 昌



No.616

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 616 October 2014

複素解析の視点

遍在する複素関数

《特　集》

複素解析の魔力	5	大沢　健夫
複素代数幾何学の美学	7	辻　元
複素数で表す極小曲面	14	宮岡　礼子
複素関数の微積分からリーマン面のモジュライ空間へ タイヒミュラー空間論への道すじ	21	藤川　英華
ブラウン運動と複素解析	30	厚地　淳
複素数とシュレディンガー方程式	37	中村　周
整数論における複素解析的方法	44	松本　耕二
多変数関数論における解析接続	52	神本　丈
[コラム] 葉山シンポジウムの思い出 多変数複素解析の国際研究集会をめぐって	28	野口潤次郎

《「数理科学」は語る》

1984年10月号	58	小林　一章

《連　載》

大学院入試問題からみた大学の数学⑰ 微分方程式2　偏微分方程式	59	海老原　円 太田　雅人
微分方程式を考える③ ニュートン力学の基礎的枠組み	67	小澤　徹

《リレー連載》

フィールズ賞で語る現代数学② “コーエンの強制法”と強制法	75	渕野　昌

米沢富美子氏書籍刊行のお知らせ／51

数理科学（9月号）前号案内　／84
数理科学（11月号）次号予告　／84

数理科学バックナンバー一覧　／83

表紙：戸川　隼人

October 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 616

特集／複素解析の視点

複素解析の魔力

大沢 健夫

この原稿の締切が気になり出した6月の上旬，ドイツのマールブルク大学で複素幾何の研究集会に参加しました．主催者はこの学期で定年退職するG. シューマッハー教授で，彼を囲んで旧交を温め合う，小ぢんまりとした集会でした．シューマッハー氏は，かつてH. ベンケが多変数複素解析の学派を築いたミュンスター大学で，有名なR. レンメルトの下で学位を取得後，主に複素多様体の変形を微分幾何的方法で研究してきた人です．研究集会の内容はそれに沿ったものだったのですが，本特集の8つの記事のことも気に懸かっていた筆者の耳に残ったことを，なるべくこの特集に関連する範囲でご報告したいと思います．

最初の講演をしたのはT. ペーターネル氏（バイロイト大）で，複素代数幾何において広中の特異点解消理論以後の中心的な成果である森理論（森重文氏による）を，複素トーラスを含む広い範囲へと拡張しようという話でした．森理論は代数多様体の分類理論の最先端を切り開いたわけですが，円や楕円の幾何学からそこまでの道筋を，辻元氏の解説は香気豊かに伝えています．ペーターネル氏はゲッチンゲン大学でH. グラウエルトの下で学位を取りました．グラウエルトとレンメルトはベンケの弟子なので，ペーターネル氏とシューマッハー氏は学問的にはいとこどうしということになります．一日目の最後の講演者は，やはりグラウエルトの弟子のG. デトロフ氏（ブレスト大）でした．デトロフ氏の話は極小曲面についてのもので，ガウス写像の性質を複素解析的方法で調べるというものでした．極小曲面の法線方向がコーシー・リーマン方程式で縛られるということから，値分布論を用いて興味深い結果が得られます．基本は平均曲率が0という条件がコーシー・リーマン方程式に他ならないという点です．宮岡礼子氏はこの分野で著名ですが，今回は特に3次元球面内の極小曲面の理論の広がりについても語っておられます．

コーシー・リーマン方程式を複素変数で書くと単に「微分可能」の意味になり，モレラの定理を経ればそれは「積分可能」と同義になります．高木貞治の『解析概論』で「驚嘆すべき朗かさ!」と謳われた部分です．そこを掘り下げて行くと「無限次元タイヒミュラー空間」という小宇宙の入口に達します．その雰囲気を藤川英華氏の解説で味わって下さい．

思い起こせば1989年，ルーマニアの首都ブカレストで開かれた複素解析の大研究集会がありました．日本からも筆者を含む多数の参加がありましたが，その開会の辞で「コーシー以来の伝統ある複素解析」という言葉を聞きました．今日の大学で，複素解析が微積分や線形代数と同様に理工系の学科で必修科目になっている背景には，「Gauss

が虚数積分に触れてから約百年を経て」(『解析概論』)完成した堅固な基礎理論があることを，私たちは忘れてはいけないと思います．

さて，値分布に戻りますと，この理論は値域が高次元の場合，不定方程式の理論との類似が顕著になります．野口潤次郎氏は長年この分野で指導的な活躍をされるとともに国際的な研究交流にも尽力され，氏が1995年に立ち上げられた「多変数複素解析葉山シンポジウム」は有名です．この方面の未解決問題である“Green–Griffiths–Lang予想”について話したJ.-P. ドゥマイエ氏(グルノーブル大)は，見るからにコーシーの伝統を受け継ぐフランスの複素解析のエースですが，今回は新たに確率解析の適用を提案していました．厚地淳氏が解説される複素解析とブラウン運動との関連は，これと軌を一にするものといえましょう．

マールブルクでは神学部の建物に近い大学の宿舎に泊まりました．場所は公園の一角で環境は申し分なかったのですが，朝食のため“Brot und Zeit”という名のパン屋さんまで散歩しないといけませんでした．しかしそこでN. ブクダール氏(アデレード大)とゆっくり話ができました．彼は変形理論の元祖である小平・スペンサーの論文のことを，「まるで昨日書かれたように新鮮だ」と激賞していました．小平先生の論文には筆者もおおいにお世話になりましたが，1990年に京都で開催されたICM(国際数学者会議)の直前に新聞で読んだ，「複素数がなければシュレディンガー方程式さえ書けない」という言葉も強く印象に残っています．小平先生がその頃テレビでされた一般向けの講座でも，この点が強調されていました．中村周氏の解説では，トンネル効果の大きさの決定に複素解析性が関わってくるという，より立ち入った興味深い現象が語られます．

マールブルクを去る朝，部屋で大学の広報誌を眺めていたところ，先の学長で今年80才を迎えたW. シャールという人物が紹介されていました．目を引いたのは“Die Magie der Zahlen”(数の魔術)という題名で，なるほど，シャール氏は解析数論で有名な大数学者C.L. ジーゲルの弟子で，やはりゲッチンゲンで学んだ数学者なのでした．その記事にはシャール氏が魔方陣の歴史を調べてネットに公開していることなどが書かれていましたが，本特集では松本耕二氏が数論研究における複素解析の魔術的な効果について，実に巧みに解説して下さっています．

あと一つ，神本丈氏の解析接続についての解説に関連する出来事が何かほしいと思っていたところ，帰国の直後，何と，新聞に「超幾何関数」が出ているではありませんか．夏目漱石の『吾輩は猫である』に出てくる「超絶的曲線」はこれを指すというのです．この超幾何関数の多価性を正確に記述するために必要とされたのが，まさに解析接続の概念でした．この研究から本格的な多変数関数論が緒に就いたことは有名ですが，神本氏はそこから最近の展開までを親しみやすい筆致で語っています．

ところで，実は新聞の記事は不正確で，「超絶的」は単に“transcendental”を訳しただけのようです．しかし漱石が寺田寅彦あたりからこの関数について聴き知っていたようなことは，もしかしたらあるかもしれません．というのも，最近あるSF小説の中で次の文章を目にしたからです．

「ここでϕをX上の滑らかな多重劣調和エグゾースチョン関数とすると，この式は十分小さな正の数εに対してX上の完備ケーラー形式となり…」

筆者は今までこのようなフレーズを幾度となく論文に書いて来，マールブルクでもそのような話をしましたが，小説でこれに出会うことは想定外でした．これも複素解析の魔力のなせるわざなのかもしれません．

(おおさわ・たけお，名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

複素代数幾何学の美学



辻　元

複素代数幾何学とは，複素数体 $\mathbf{C}$ 上の代数多様体論のことである．複素代数幾何学の興味深い点は，代数幾何学のみならず，微分幾何学，多変数関数論からもアプローチが可能な点であり，そのために非常に深い理論が展開されている．実際，複素代数幾何学は，保型形式論，正則写像の値分布論，複素モンジュ・アンペール方程式の理論なども含めると，数学のほとんどの分野を網羅している巨大な分野で，その全貌を知ることは容易ではない．

そこで，ここでは，いくつかのトピックに絞って，初心者向けの解説を試みる．

1. 代数幾何学とは何か？

代数幾何学とは有限個の多項式の共通零点を研究する数学の一分野である．ここでは，まず，係数体を複素数に拡大して考える理由を解説する．

1.1 二次曲線と実射影平面

実平面二次曲線，例えば楕円，放物線，双曲線については高校で学ぶ．この実平面上の二次曲線の理論は，高等学校で習う．この平面二次曲線の理論は，比較的簡単だが，平面を実射影平面に拡張して考えると，より分かり易くなる．

実 $n+1$ 次元空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ から原点 O を除いた空間 $\mathbf{R}^{n+1}-\{\mathrm{O}\}$ に同値関係

$$x \sim x' \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbf{R}-\{\mathrm{O}\} \text{ s.t. } t\cdot x = x'$$

を考える．この同値関係による商集合（同値類の集合）

$$\mathbf{RP}^n = \mathbf{R}^{n+1}-\{\mathrm{O}\}/\sim$$

を $\boldsymbol{n}$ **次元実射影空間**という．$x \in \mathbf{RP}^n$ の同値類を $[x]$ で表し，$x=(x_0,\cdots,x_n)$ の同値類を $[x_0:\cdots:x_n]$ で表し，これを x の斉次座標という．

$\pi:\mathbf{R}^{n+1}-\{\mathrm{O}\}\to\mathbf{RP}^n$ を自然な射影 $\pi(x)=[x]$ として，$U\subset\mathbf{RP}^n$ が開集合 $\Longleftrightarrow \pi^{-1}(U)$ が開集合と定義することにより位相が入る（商位相）．今 $j=0,\cdots,n$ に対して

$$U_j := \{[x_0:\cdots:x_n] | x_j \neq 0\}$$

とおき $\varphi_j : U_j \to \mathbf{R}^n$ を

$$\varphi_j([x_0:\cdots:x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_j},\cdots,\frac{\widehat{x_j}}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}\right)$$

（ただし，$\widehat{\ }$ は除外の意）で定義すると同相写像であり，$\mathbf{RP}^n$ は可微分多様体の構造を持つことが確かめられる．すなわち，$\mathbf{RP}^n$ は，$\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な開集合で覆われ，その座標近傍系 $\{(U_j,\varphi_j)\}$ の座標変換は可微分である．

今 $\mathbf{RP}^2$ の開集合 U_0 を φ_0 により平面 $\mathbf{R}^2$ と同一視して，平面二次曲線を $\mathbf{RP}^2$ 内で閉包をとることにより拡張してみよう．$\mathbf{RP}^2$ は

$$\mathbf{RP}^2 = U_0 \cup \{[x_0:x_1:x_2]\in\mathbf{RP}^2 | x_0 = 0\}$$

と分解され，後者は $\mathbf{RP}^1$ と同一視される．

$$L_\infty := \mathbf{RP}^2 - U_0$$

を無限遠直線と呼ぶ．

今 $F(x,y)$ を二変数実係数二次多項式として，平面二次曲線

$$C := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | F(x,y) = 0\}$$

を考える．

$$P(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

とおくと P は斉次二次式である（つまりすべての項が二次の多項式），そこで

$$\overline{C} := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{RP}^2 | P(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

とおくと，$\overline{C} \cap U_0$ は φ_0 により C と同一視されて $\overline{C}$ は C のコンパクト化になる．

例えば，放物線 $C = \{(x,y) | x^2 - y = 0\}$ を考えると，

$$\overline{C} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{RP}^2 | x_0 x_1 - x_2^2 = 0\}$$

となり，$\overline{C} \cap L_\infty = [0:0:1]$ となる．そして

$$U_2 \cap \overline{C} = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{RP}^2 \middle| \frac{x_0}{x_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2\right\}$$

となり $\overline{C}$ は L_∞ に 1 点 $[0:0:1]$ で接することが分かる．

こういったコンパクト化を考えると，楕円，放物線，双曲線は，それぞれ，無限遠直線 L_∞ と「交わらない」，「1 点で接する」，「2 点で交わる」ということで区別されることが分かる．このように平面 $\mathbf{R}^2$ を実射影平面 $\mathbf{RP}^2$ にコンパクト化して考えると，二次曲線の理論は，より透明なものになる．

1.2 複素代数幾何学

複素射影空間とは $\mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$ に同値関係

$$z \sim z' \iff \exists t \in \mathbf{C} - \{O\} \text{ s.t. } t \cdot z = z'$$

を考える．この同値関係による商集合（同値類の集合）

$$\mathbf{CP}^n = \mathbf{C}^{n+1} - \{O\}/\sim$$

を $\boldsymbol{n}$ **次元複素射影空間**という．$z = (z_0, \cdots, z_n)$ の同値類を $[z_0 : \cdots : z_n]$ で表し，これを z の斉次座標という．

実射影空間と同様に商位相を入れる．今 $j = 0, \cdots, n$ に対して

$$U_j := \{[z_0 : \cdots : z_n] | z_j \neq 0\}$$

とおき $\varphi_j : U_j \to \mathbf{C}^n$ を

$$\varphi_j([z_0 : \cdots : z_n] = \left(\frac{z_0}{z_j}, \cdots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

で定義すると同相写像であり，$\mathbf{CP}^n$ は**複素多様体**の構造を持つことが確かめられる．すなわち，$\mathbf{CP}^n$ は，$\mathbf{C}^n$ の開集合と同相な開集合で覆われ，その座標近傍系 $\{(U_j, \varphi_j)\}$ の座標変換は正則である．

1.3 三次曲線と楕円関数

二次曲線を実射影平面で考えたが，一つ次数を上げた三次曲線の場合，実射影平面で考えても，理論は複雑になってしまう．そこで，複素射影平面 $\mathbf{CP}^2$ 内で考えることにしよう．$\lambda \in \mathbf{C} \backslash \{0,1\}$ に対して，$\mathbf{CP}^2$ 内の三次曲線

$$C := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{CP}^2 \\ | z_0 z_2^2 = z_1(z_1 - z_0)(z_1 - \lambda z_0)\}$$

を考える．$U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ 上の座標 $(x,y) = (z_1/z_0, z_2/z_0)$ により，

$$C \cap U_0 = \{(x,y) | y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

となる．$\lambda \in \mathbf{R}$，$\lambda > 1$ とすると $C \cap \mathbf{R}^2$ は，次のような形になる．

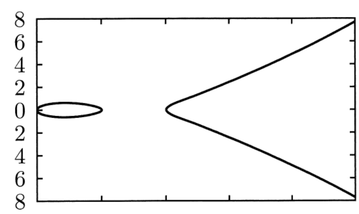


図 1

$\mathbf{RP}^2 \cap C$ で考えると，この形は 2 つの円からなることが分かる．さて，これから，C は下図のようなドーナツ面で，これを $\mathbf{RP}^2$ で切った切り口を見ていることを説明しよう．

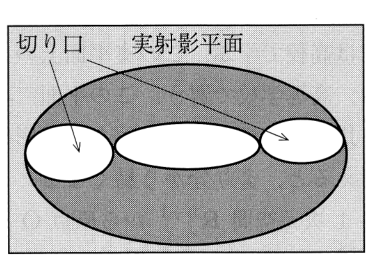


図 2

1.4 楕円関数

$\omega \in \mathbf{C}$ を虚部 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ となる複素数とする．

$\mathbf{C}$ 上の有理型関数（局所的に正則関数の商として表される関数）f が周期 $\{1, \omega\}$ の二重周期関数であるとは,

$$f(z+m+n\omega) = f(z)$$

がすべての $z \in \mathbf{C}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ について成り立つことである．複素平面上の格子 $\Gamma := \{m+n\omega | m, n \in \mathbf{Z}\}$ を考え，$\mathbf{C}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$z \sim z' \Longleftrightarrow z - z' \in \Gamma$$

と定義する．$C(\Gamma) := \mathbf{C}/\Gamma = \mathbf{C}/\sim$ とおくと，$C(\lambda)$ は1次元コンパクト複素多様体であり，周期 $\{1, \omega\}$ をもつ二重周期有理型関数は $C(\omega)$ 上の有理型関数とみなすことができる．$C(\Gamma)$ は，その構成から，位相的には，平行四辺形の対辺をそれぞれ同一視して得られる，トーラス（円環面）である．

さて，このような二重周期有理型関数には，どのようなものが存在するだろうか．

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

とおくと $\mathbf{C}$ 上の有理型関数である（確かめよ）．これをワイエルストラスの $\wp$ 関数という．

$$\wp(z+\gamma) = \wp(z) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

が成り立つから $\wp$ は $\mathbf{C}$ 上の二重周期有理型関数である．また $\wp(z) = \wp(-z)$ に注意する．特に $\wp(z)$ は $z=0$ で留数をもたない．すなわち,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \frac{2}{(z-\gamma)^3}$$

である．$\wp'$ は奇関数であり，原点に3位の極を持つ二重周期関数である．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1.1 $\mathbf{C}$ 上の周期 $\{1, \omega\}$ の二重周期有理型関数全体を $\mathbf{C}(\Gamma)$ と表すと,

$$\mathbf{C}(\Gamma) := \mathbf{C}(\wp, \wp')$$

である．すなわち，$\mathbf{C}(\Gamma)$ の元は $\wp$ と $\wp'$ の有理式として表される．□

実際，$f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ とすると,

$$f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'} \wp'(z)$$

であり，$\frac{f(z)+f(-z)}{2}$, $\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'}$ は偶関数なので，f が偶関数のとき $f(z) \in \mathbf{C}(\wp)$ を示せばよい．f の $\mathbf{C}(\Gamma)$ 上の零点 $a_1, \cdots, a_p$ と極 $b_1, \cdots, b_q$ をとる．但し a と $-a$ は同一視して位数分だけ重複して数える．

$$g(z) = \frac{\prod_{i=1}^{p} (\wp(z) - \wp(a_i))}{\prod_{j=1}^{q} (\wp(z) - \wp(b_j))}$$

とおくと $f(z)$ と $g(z)$ の零点と極は一致する．$f(z)/g(z)$ は $\mathbf{C}(\Gamma)$ 上，有界な正則関数であるから，定数である．よって $f \in \mathbf{C}(\wp)$ となる．□

$\wp'(z)$ は奇関数なので，自動的に $\left[\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{\omega}{2}\right]$, $\left[\frac{1+\omega}{2}\right]$ で零点を持つ．$\wp'(z)$ は原点で3位の極を持つので，これらの零点の位数は1である．これから

$$\wp'(z)^2 = C\left(\wp(z) - \wp\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \times \left(\wp(z) - \wp\left(\frac{1+\omega}{2}\right)\right)$$

を得る．原点における $\wp$ と $\wp'$ のローラン展開から $C=4$ となり計算を進めると

$$\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$
$$g_2 = 60 \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \gamma^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \gamma^{-6}$$

を得る．さて $\Phi : C(\Gamma) \to \mathbf{CP}^2$ を $\Phi(z) = [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$ で定義することができる．Φ は正則でその像は

$$C := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{CP}^2 \\ | z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3\}$$

に含まれる．Φ は全単射である．実際，方程式：$\wp(z) = u$ は，$C(\Gamma)$ 上で重複度を込めて，ちょうど2個の解をもつが，$\wp'(z)$ は奇関数なので $\wp'(z)$ は，この2つの解を分離する．従って Φ は $C(\Gamma)$ と C の双正則同型を与える．

このようにトーラス $C(\Gamma)$ は，$\mathbf{CP}^2$ 内の3次曲線として実現できることが分かった．

$C(\Gamma)$ を一般に楕円曲線というが，このように $\wp$ 関数を用いて，楕円曲線は，三次曲線として実現できることが分かるのである．一見，関連性の薄い，複素関数論と代数幾何が結びつくのは興味深い．

1.5 コンパクトリーマン面と代数曲線

1次元のコンパクト複素多様体を**コンパクトリーマン面**という．コンパクトリーマン面は，位相的には種数（＝第一ベッチ数の半分）で分類される．簡単に言えば，コンパクトリーマン面は，種数人乗りの浮き輪（下図）と位相同型である．

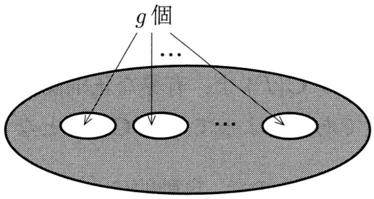


図 3

コンパクトリーマン面はすべて，$\mathbf{CP}^n$ 内の1次元複素部分多様体として実現でき，それらは代数曲線となる．

このことは，様々な方法で示すことができるが，基本的には楕円曲線の場合の $\wp$ 関数に当たるものを構成することにより証明される．

関数論の Koebe の一意化定理により，コンパクトリーマン面の普遍被覆は，$\mathbf{CP}^1, \mathbf{C}, \Delta$ のいずれかに双正則同型である．ここで Δ は単位円板

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C} | \ |z| < 1\}$$

である．このことからコンパクトリーマン面が代数曲線と双正則同値であることを証明するには，単位円板 Δ の不連続群による商 $C = \Delta/\Gamma$ となっている場合（種数2以上の場合に相当する）に証明すればよい．ここで Γ は Δ の双正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta) \simeq SL(2, \mathbf{R})$ の離散部分群で Δ に固有不連続に作用するものである．

さて，η を Δ 上の任意の L^2-正則形式としよう．すなわち η は Δ 上の正則関数 $f(z)$ を用いて，$\eta = f(z)dz$ と書け，$|f(z)|^2$ は Δ 上，積分が有限であるとする．このとき $m \geq 2$ に対して

$$P_m(\eta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \eta^m$$

とおくと $P_m(\eta)$ は Δ 上の Γ-不変な m 重正則形式となる．つまり $P_m(\eta)$ は C 上の m 重正則形式を与える．η と m を変えることにより，少し議論すれば次が示せる．

定理 1.2 C を Δ を普遍被覆に持つ，コンパクトリーマン面とする．このとき m を十分大きな自然数とすると，C 上の m 重正則形式 $\eta_0, \cdots, \eta_N$ が存在して，$\Phi : C \to \mathbf{P}^N$ を

$$\Phi(z) = [\eta_0(z) : \cdots : \eta_N(z)]$$

と定めると，Φ により C は $\mathbf{P}^N$ 内の代数曲線 $\Phi(C)$ として正則に埋め込める．□

この定理は，$\mathbf{C}^n$ の有界領域を普遍被覆に持つコンパクト複素多様体についても同様に成り立つ．

2. 高次元複素代数幾何学とリッチ流

1次元の代数多様体の複素構造は，$\wp$ 関数や保型関数のような特殊関数を用いて明らかにすることができた．しかし，2次元以上の複素代数多様体の場合には，そう簡単ではなく，与えられた代数多様体をいくつかのパーツに分解することが必要になる．

その分解を実現する道具である**ケーラー・リッチ流**を紹介する．

2.1 ケーラー計量

X をコンパクト複素多様体とする．g を X の正則接束 TX のエルミート計量とする．

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

をエルミート多様体 (X, g) の基本2形式という．(X, g) が**ケーラー多様体**であるとは，ω が閉形式，すなわち $d\omega = 0$ を満たすことである．このとき (X, ω) をケーラー多様体であるといい ω をケーラー形式という．

例えば $\mathbf{CP}^n$ は

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{z_i}{z_0} \right|^2 \right)$$

が，ケーラー形式となる．正確には $\mathbf{C}^{n+1} - \{\mathrm{O}\}$ 上の2形式 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(\sum_{i=0}^{n} |z_i|^2)$ が $\mathbf{C}^{n+1} - \{\mathrm{O}\}$ が $\mathbf{C}^{n+1} - \{\mathrm{O}\}$ 上の $\mathbf{C}^*$ 作用で不変なために $\mathbf{CP}^n$ 上の閉2形式を定める．ω_{FS} を**フビニ・スタディケーラー形式**と呼ぶ．

これから，特にすべての非特異複素代数多様体，すなわち，$\mathbf{CP}^n$ のコンパクト部分多様体はケー

ラー多様体であることが分かる．

2.2 カラビ予想

Koebe の一意化定理によって，1 次元の複素多様体の普遍被覆は $\mathbf{CP}^1, \mathbf{C}, \Delta$ のいずれかに双正則同値になる．これらの多様体は，計量

$$\frac{|dz|^2}{(1+|z|^2)^2},\quad |dz|^2,\quad \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

（$\mathbf{CP}^1$ の場合は $z=\frac{z_1}{z_0}$）を持ち，これらはそれぞれ正，ゼロ，負の定曲率計量になる．$\mathbf{C}, \Delta$ の正則自己同型群は，これらの計量を不変にするので，これから，コンパクトリーマン面（= コンパクト複素代数曲線）は定曲率計量を持つことが分かる．

それでは，2 次元以上の複素代数多様体は，何らかの意味で定曲率計量を持つだろうか？ この問いに関する，最もリーズナブルな回答は，「リッチ曲率ならば，可能性がある」というものである．それがカラビ予想である．

まずケーラー多様体のリッチテンソルを定義する．(X,g) をケーラー多様体とする．

$$\mathrm{Ric}(\omega) := -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$$

を (X,g) の**リッチテンソル**という．これは正則座標近傍の取り方に依らない．$\det(g_{i\bar{j}})^{-1}$ は，標準束 $K_X := \wedge^n T^*X$（T^*X は X の正則余接束，$n:=\dim X$）である．すなわち K_X は X 上の $(n,0)$-形式のつくる直線束である．ある定数 $c\in\mathbf{R}$ に対して $\mathrm{Ric}(\omega)=c\omega$ を満たす計量を**ケーラー・アインシュタイン計量**という．

一般にコンパクト複素多様体 X 上の正則複素直線束 L が，正であるとは，L の上のエルミート計量 h で，その曲率形式 $\Theta(h) := \bar{\partial}\partial\log h$ が X 上で $\sqrt{-1}\Theta(h)>0$ を満たすこと，すなわち $\sqrt{-1}\Theta(h)$ が X 上のケーラー形式となることをいう．複素多様体のエルミート直線束，その曲率やチャーン類については文献 2) を参照のこと．

定理 2.1（カラビ予想の解）X をコンパクトケーラー多様体とする．このとき，次が成り立つ．

(1) K_X が正ならば $-\mathrm{Ric}(\omega)=\omega$ を満たすケーラー計量（ケーラー・アインシュタイン計量）が存在する．

(2) η を，そのド・ラームコホモロジー類が $c_1(K_X)$ に属する可微分 $(1,1)$ 形式とすると，任意のケーラー形式 ω_0 に対し，ω_0 とコホモロガスな，ケーラー形式 ω で $-\mathrm{Ric}(\omega)=\eta$ となるものが存在する．特に，$c_1(K_X)=0$ ならば，任意のケーラー類に一意的にリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン計量が存在する． □

この定理は，1977 年に T. Aubin が (1) を S.-T. Yau が独立に (1) と (2) を示すことにより解かれた．

このように高次元の複素代数多様体においては，コンパクトリーマン面の Koebe の一意化定理に当たるものが定理 2.1 であると考えられる．

2.3 極小モデル理論

カラビ予想の解が Koebe の一意化定理の一般化と言っても，高次元代数多様体の場合には K_X が正または 0 の場合にしか，一般にケーラー・アインシュタイン計量は存在しない．従って，例えば楕円曲線と種数 2 以上のリーマン面の直積を考えると，このような代数曲面には，リッチ曲率が定数のケーラー計量は存在しない．

また $K_X>0$ となる n 次元複素代数多様体 X を考えると，X にはケーラー・アインシュタイン計量が存在するが，この X を 1 点ブローアップする（つまり X の 1 点を $\dim X-1$ 次元の射影空間で置き換える操作）とケーラー・アインシュタイン計量は入らない．このように，ほとんどの高次元複素代数多様体には，リッチ曲率が定数のケーラー計量は，入らない．従って，代数多様体自体を幾つかのパーツに分割して，それぞれのパーツにケーラー・アインシュタイン計量が入るようにできないかを考えることは自然であろう．

ところが，代数幾何学では，与えられた代数多様体を双有理同値の範囲で改変する改変操作や，より低次元の代数多様体を底空間とするファイブレーションを構成して，理解する理論が構築されつつある．これが，**極小モデル理論**である．極小

モデル理論においては，次の3つのタイプの代数多様体に分解することを考える．

(1) $-K_X > 0$ となる代数多様体（ファノ多様体）．

(2) $c_1(K_X) = 0$（K_X の何倍かが自明束）となる代数多様体．

(3) $K_X > 0$ となる代数多様体．

これは，複素微分幾何学的には，リッチ曲率が正，0，負のコンパクト・ケーラー多様体に相当する．正確には，非特異な代数多様体だけでなく，標準特異点を持った代数多様体を考えるのだが，標準特異点があっても，実際には，ほとんど障害になることはない．

1次元の場合は，(1) が $\mathbf{CP}^1$，(2) が楕円曲線，(3) が種数2以上の代数曲線に相当するわけで，これも Koebe の一意化定理の高次元化とみなすことができる．さて，極小モデル理論は，どのようにして，これらの3つの幾何学への分離を行うのだろうか．まず，射影代数多様体 X が極小であるとは，その標準束が数値的に半正であることである．つまり X の任意の既約曲線 C に対して，$K_X \cdot C \geq 0$ となることである．この数値的半正という条件は，大雑把にいえば，リッチ曲率が0以下のケーラー計量が入るということを意味する．つまり，極小代数多様体とは，標準束の負の部分を取り除いた代数多様体ということになる．極小モデルの存在に関しては次の予想がある．

予想 2.1（極小モデル予想） X を非特異射影代数多様体とする．このとき，次が成り立つ．

(1) 代数的ファイブレーション：$f : X \to Y$ で一般ファイバーの標準束が負となる代数多様体（上の分類で (1) のタイプ）となるもの（森ファイバー空間）と双有理同値である．

(2) X と双有理同値な極小代数多様体（極小モデル）が存在する．□

少し補足すると，与えられた代数多様体から極小モデルを構成するには，基本的には，「K_X が負になっている部分」をつぶしていけばよいが，つぶしたら次元が低くなってしまった，という場合が (1) に当たる．つぶす場合には，必ず標準束が負の多様体をファイバーとするファイバー空間が底空間につぶれることが分かるので，基本的には，標準束を負にしているのは，ファノ多様体で，これをつぶしていけばよいのだが，単純にどんどんつぶしていけばよいわけではなく，フリップという操作が必要になる．

さて，極小モデルが得られたとして，次にリッチ平坦なパートを分離するには，どうしたらよいのだろうか，X を非特異代数多様体として

$$\kappa(X) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\log h^0(X, mK_X)}{\log m}$$

とおき X の**小平次元**と呼ぶ．$h^0(X, mK_X)$ の定義は省くが，直線束 mK_X（K_X の m 乗を通常こう書く）の「大きさ」を表す指標である．$\kappa(X) \geq 0$ の場合，m を十分大きな自然数とすると，$m!K_X$ に付随する有理写像 $\Phi : X \to \mathbf{P}^N$ $(N = \dim|m!K_X|)$ が得られる．この像 Y の次元は $\kappa(X)$ となる．

リッチ平坦パートの分離には，次のアバンダンス予想を用いる．

予想 2.2（アバンダンス予想） X を極小代数多様体とすると，十分大きな自然数 m に対して完備線形系 $|m!K_X|$ は，底点を持たず，付随する正則写像 $\Phi : X \to \mathbf{CP}^N (N = h^0(X, mK_X) - 1)$ はファイブレーション：$f : X \to Y$（**飯高ファイブレーション**）を与え，その一般ファイバーの標準束は有限位数となる．特に $f : X \to Y$ の一般ファイバーは，リッチ平坦なケーラー計量を持つ．□

予想 2.1，予想 2.2 共，3次元以下の複素代数多様体については証明されているが，より高次元の場合は未解決である．

2.4 ケーラー・リッチ流

X をコンパクト・ケーラー多様体，ω_0 を X 上のケーラー形式とする．このとき方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -\mathrm{Ric}(\omega) - \omega, \quad \omega(0) = \omega_0 \qquad (1)$$

を $X \times [0, T)$ で考える．ここで T は C^∞ 級の解の極大存在時間である．ケーラー・リッチ流を極小モデル上のケーラー・アインシュタイン計量の

存在を示すのに初めて使ったのは，私の 1988 年の論文[3]である．

この方程式は要するに $-\mathrm{Ric}(\omega)$ が ω に近付くように，すなわち $-\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$ となるケーラー・アインシュタイン計量を目指して動いていく．しかし，一般にはこういった（滑らかな）計量は X 上には存在しない．だから，一般には方程式 (1) は C^∞ 級の大域解を持たず，有限時間で特異点を生成する．ケーラー条件から $d\omega_0 = 0$ であるが，上の方程式から，すべての $t \in T$ について $d\omega(t) = 0$ が成り立ち，ω のド・ラームコホモロジー類を $[\omega]$ で表すと $[\omega(t)] = (1 - e^{-t})2\pi c_1(K_X) + e^{-t}[\omega_0]$ となり $[\omega(t)]$ は，$[\omega_0]$ と $2\pi c_1(K_X)$ を結ぶ線分上を動くことが分かる．$C(X) = \{[\eta] | \eta$ は X 上のケーラー形式$\}$ とおいて X の**ケーラー錐**と呼ぶ．$T = \sup\{t > 0 | [\omega(t)] \in C(X)\}$ であることは，簡単に分かる．特に K_X が数値的に半正の場合には，$T = +\infty$ となり，大域解が存在することになる．

論文[3]では X が一般型（すなわち $\kappa(X) = \dim X$）の極小代数多様体場合に，$\lim_{t\to\infty} \omega(t)$ がケーラー・アインシュタインカレントに収束することを示した．

さて，$c_1(K_X)$ が擬正，すなわち正閉カレントで代表される場合には，方程式 (1) は，$\omega(t)$ がクラス内で，極小特異性を持つという条件下で，一意的に大域解をもつことがわかる．

このカレント解 $\omega(t)$ は，X のザリスキ開集合上で，C^∞ である．この解の挙動を見ていると $K_X \cdot C < 0$ となる曲線は，有限時間でつぶれてしまうことが分かる．つまりケーラー・リッチ流は，自動的に極小モデルを生成するものであることが分かる．この事実は，論文[1]に現れた，スケール付極小モデルの構成にちょうど対応しているのである．つまり，適当な離散時間：$0 < T_0 (= T) < T_1 < T_2 < \cdots$ が存在して，その時間ごとに新たな特異点を生成し，それは，ちょうど，スケール付極小モデルの構成の際に現れる特異点に対応している．

このように，ケーラー・リッチ流は，極小モデルを微分幾何学的に生成するものなのだ．そこで，極小モデル予想（予想 2.1）やアバンダンス予想（予想 2.2）をケーラー・リッチ流を使って証明することが考えられる．実際，極小モデル予想はケーラー・リッチ流の極限

$$\omega_\infty := \lim_{t\to\infty} \omega(t)$$

が存在し，飯高ファイブレーションによる底空間の一般化されたケーラー・アインシュタイン形式の引き戻しになっていることと同値である．つまりケーラー・リッチ流は，時間発展と共に，有限時間で森ファイバー空間のファイバーを 1 点につぶす形で，より低次元の多様体へと元の多様体 X をつぶすか（予想 2.1 の (1) の場合），時間発展と共に，X のファノ成分をつぶしていき，時間無限大で，リッチ平坦成分をつぶして，一般化されたケーラー・アインシュタイン計量に収束すると思われる．

2.5 ケーラー多様体の極小モデル理論

コンパクト・ケーラー多様体は，一般に代数多様体と双正則同値にはならない．しかし，極小モデル理論自体は，代数多様体の場合と同じように成立すると思われる．この証明には，ケーラー・リッチ流を使うのが自然であると思われる．つまり，ケーラー・リッチ流が自然な改変操作を行い，ケーラー多様体の極小モデル（標準特異点を持ち，標準束が数値的に半正の多様体）を構成するものと考えられる．

このあたりのことは，私自身が現在研究中であり，特にケーラー多様体のケーラー族について，射影的な場合と同様のケーラー・リッチ流の擬凸性が成り立つのかどうか，非常に興味がある．いずれにしろ，こういったことは，近いうちに明らかになるだろう．

参考文献

1) C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, C.J. McKernan: Existence of minimal models for varieties of log general type, *J. of A.M.S.* **23-2**, 405–468 (2010).
2) 辻　元：『複素多様体論講義』，SGC ライブラリ 94，サイエンス社 (2013).
3) H. Tsuji: Existence and degeneration of Kähler-Einstein metrics on minimal algebraic varieties of general type, *Math. Ann.* **281**, 123–133 (1988).

（つじ・はじめ，上智大学理工学部）

複素数で表す極小曲面

宮岡 礼子

1. 序

本誌 2010 年 10 月号に「極小曲面と変分問題」の題名で拙文を書かせていただいた[7]．極小曲面が面積の臨界点を与える曲面であることについてはそちらを参照していただきたい．

今回は同じ極小曲面を複素数で記述する話をする．そもそも 2 次元の向き付けられたリーマン多様体には自然に**複素構造**が入ることが知られており，特に極小曲面の場合はその証明（**等温座標**の存在を示す）が比較的容易に与えられる[2]．

ここでは等温座標（複素座標）を用いて極小曲面を記述し，その有用性や関連する話題に触れる．例えば，3 次元ユークリッド空間の極小曲面の座標関数は**調和関数**の組で与えられるが，これにより，**ワイエルシュトラス表現**と呼ばれる**有理型関数** g と**正則微分** ω の組で極小曲面を表す基本的な手法が導ける．特に g は極小曲面の**ガウス写像**，すなわち単位法ベクトルを 2 次元単位球面に移す写像として与えられ，その値分布に関しては重要な未解決問題も存在する．

さらに球面 S^n 内の極小曲面も，複素座標で表すことにより，統一的な手法で記述できる．ここでは写像は球面上の調和関数で与えられ，特に $n = 3$ のときは，そのガウス写像を用いたバイポーラー写像という 5 次元球面 S^5（実はさらにその中の $S^2 \times S^2$）への自然な写像が定まる（Lawson[3]）．計量を共形変形すると，これもまた極小曲面になる．この事実は，近年複素 2 次超曲面 $Q_2(\mathbb{C})$ への調和写像と解釈されることにより，$Q_2(\mathbb{C})$ の**ラグランジュ極小曲面**を与えるという興味深い事実につながり，Palmer や Castro–Urbano によりこの観点からの深い研究がなされている．

さて，さらに余次元の高い球面の極小曲面の方程式は，**戸田方程式**という**可積分系**になっており，これは球面の極小曲面を複素座標で記述することにより発見されたものである．

以上のように，極小曲面と複素数の相性は大変よい．一方で誤解してはならないことは，あくまでも極小曲面は実幾何であるということである．実幾何として最も難解な点は周期条件であり，曲面のサイクルに沿い，周期の実部のみが消えなければならないという点は，大域問題を考える際に常にネックとなる箇所である．

このように，極小曲面論は，複素曲線論で片付けることのできない，微分幾何が重要な役割を果たす基本分野である．また古くから，極小曲面が化学や建築など実社会と結びついたものであることも興味をそそられる一因である．3 重周期をもつ $\mathbb{R}^3$ の極小曲面（図 1）は，幾何学的には 3 次元トーラスのコンパクト極小曲面として，応用的には 2 つの物質の界面として化学の世界に現れる非常に興味深い対象である．

以下初等的なところから解説を行っていく．なお，本稿の図は内容の理解の助けになるよう，カラーのものを**裏表紙裏**に掲載した．あわせて参照していただきたい．

[謝辞] 今回もすべての図を岡山大学の藤森祥一准教授に描いていただいたことと，さらに原稿を読んでいただき，ミスを指摘していただいたことに心から感謝する．

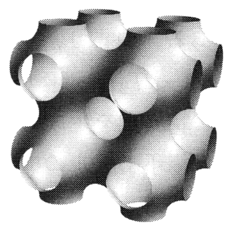


図 1 周期性をもつ極小曲面：シュワルツ P 曲面．

2. $\mathbb{R}^3$ の極小曲面

$\mathbb{R}^3$ の曲面を $f: M \to \mathbb{R}^3$ と表すことにしよう．ここに M は2次元多様体で，$\mathbb{R}^3$ から誘導される計量 ds^2 をもつものとする．ユークリッド内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書き，これを複素線形に拡張したものも同じ記号で表す．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}\rangle = i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, \quad i = \sqrt{-1}$$

と約束する．さて，(x, y) が M の等温座標であるとは，$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ と書くとき，

$$\langle f_x, f_x\rangle = \langle f_y, f_y\rangle > 0, \quad \langle f_x, f_y\rangle = 0 \qquad (1)$$

が成り立つことである．$z = x + iy$ に対して $\partial = \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\bar\partial = \dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ と約束すると，(1) は

$$\langle \partial f, \partial f\rangle = 0 \qquad (2)$$

と簡単に書ける．実際，

$$\begin{aligned}\langle \partial f, \partial f\rangle &= \frac{1}{4}\langle f_x - i f_y, f_x - i f_y\rangle \\ &= \frac{1}{4}\Big(\langle f_x, f_x\rangle - \langle f_y, f_y\rangle\Big) - \frac{i}{2}\langle f_x, f_y\rangle\end{aligned}$$

を得る．

向き付け可能な C^2-級の2次元リーマン多様体 M には等温座標が存在することが知られており，この座標の存在は (1) の $|f_x|^2 = \langle f_x, f_x\rangle$ の値には関係しないので共形構造とも呼ばれる．これは複素構造と同値であるので，M は**リーマン面**，つまり1次元の複素多様体となる．今，

$$F = |\partial f|^2 = \langle \partial f, \bar\partial f\rangle = \frac{1}{4}(|f_x|^2 + |f_y|^2),$$

$$\text{つまり } 2F = |f_x|^2 = |f_y|^2$$

とおくと，

$$ds^2 = 2F|dz|^2$$

と書ける．このとき，ds^2 に関する M の**ラプラス作用素**は

$$\triangle = \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{2\partial\bar\partial}{F}$$

で与えられる．従って，等温座標に関して，極小曲面の座標関数は調和関数であることを認める[7)]と，$\mathbb{R}^3$ の極小曲面は

$$\partial\bar\partial f = 0 \qquad (3)$$

をみたす．これより，∂f は正則であるから，$\log F = \log|\partial f|^2$ は**劣調和関数**，すなわち $\triangle \log F \geq 0$ が成り立つ．**ガウス曲率** K は

$$K = -\frac{\partial\bar\partial \log F}{F} \qquad (4)$$

で与えられるから，極小曲面のガウス曲率は常に非正である．

次に，

$$\phi = \partial f = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

と表すとき，(3) より各 ϕ_i は局所正則関数である．$\phi_i dz$ を考えると，これは M 上の正則微分（従って大域的，つまり座標の取り方によらないもの）となる．逆に M の単連結近傍 U において，$z_0 \in U$ を固定して

$$f(z) = \Re\int_{z_0}^{z}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)dz \qquad (5)$$

で f が復元できる．ここに $\Re$ で実部を表す．今 ϕ の満たすべき性質（必要条件）として，

- **[C]** $\langle \phi, \phi\rangle = 0$：**共形条件**，
- **[R]** $|\phi|^2 = F > 0$：**正則条件**，
- **[P]** $\Re\int_C(\phi_1, \phi_2, \phi_3)dz = 0$：**周期条件**（$C$ は M の任意のサイクル）

が挙げられる．[P] は，(5) が M 全体で（積分が道の取り方によらず）定義されるための必要条件である．

以上より，M 上の正則微分 ϕdz が与えられて，[C], [R], [P] をみたすとき，(5) は $\mathbb{R}^3$ の極小曲面を与える（十分条件）．実際，[C], [R] により z は誘導計量で等温座標を定め，座標関数が調和な曲面が [P] により M 全体で定まるからである．

3. ワイエルシュトラス表現とガウス写像

さて，[C] より

$$(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) + \phi_3^2 = 0$$

であるから，

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}, \quad \omega = (\phi_1 - i\phi_2)dz \qquad (6)$$

とおくことにより，有理型関数 g と正則微分 ω が決まる．すると直ちに $g\omega = \phi_3 dz$ となり，また，

$$(1 - g^2)\omega = \left(\phi_1 - i\phi_2 - \frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2}\right)dz = 2\phi_1 dz,$$

同様に

$$i(1+g^2)\omega = i\Big(\phi_1 - i\phi_2 + \frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2}\Big)dz = 2\phi_2 dz$$

となるから，$\omega = hdz$ とおくと，

$$f(z) = \int \Big(\frac{1}{2}h(1-g^2), \frac{i}{2}h(1+g^2), hg\Big)dz \quad (7)$$

を得る．つまり単連結領域上では, 有理型関数 $g: M \to \mathbb{C}P^1$ と M 上の正則微分 $\omega = hdz$ に対して

$$\phi_1 = \frac{1}{2}h(1-g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}h(1+g^2), \quad \phi_3 = hg \quad (8)$$

とおいたものが [C], [R] をみたすとき（[C] は自動的にみたされる)，極小曲面を (7) で表すことができる．これを極小曲面のワイエルシュトラス表現という．これが M 上大域的に定義されるには [P] もみたさねばならない．(g, hdz) あるいは (g, ω) をワイエルシュトラスデータという．(g, hdz) と ϕ の相互対応は，(6) と (8) により与えられる．

次に

$$F = |\phi|^2 = \frac{|h|^2}{2}(1+|g|^2)^2, \quad (9)$$

および

$$\phi_2\bar{\phi}_3 = \frac{i}{2}|h|^2\bar{g}(1+g^2), \quad \phi_3\bar{\phi}_1 = \frac{1}{2}|h|^2 g(1-\bar{g}^2),$$
$$\phi_1\bar{\phi}_2 = -\frac{i}{4}|h|^2(1-g^2)(1+\bar{g}^2) \quad (10)$$

に注意する．さて, M の法ベクトル方向は $f_x = \phi + \bar{\phi}$, $f_y = \frac{1}{i}(\bar{\phi} - \phi)$ より (10) を用いると，

$$\begin{aligned}
f_x \wedge f_y &= \frac{1}{i}(\phi + \bar{\phi}) \wedge (\bar{\phi} - \phi)\\
&= \frac{2}{i}\phi \wedge \bar{\phi}\\
&= \frac{2}{i}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \wedge (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)\\
&= \frac{2}{i}(\phi_2\bar{\phi}_3 - \phi_3\bar{\phi}_2, \phi_3\bar{\phi}_1 - \phi_1\bar{\phi}_3, \phi_1\bar{\phi}_2 - \phi_2\bar{\phi}_1)\\
&= 4\Im(\phi_2\bar{\phi}_3, \phi_3\bar{\phi}_1, \phi_1\bar{\phi}_2)\\
&= |h|^2(1+|g|^2)(2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1)
\end{aligned}$$

とかける．ここに，$\Im$ で虚部を表す．よって単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = (1+|g|^2)^{-1}(2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1) \quad (11)$$

となる．

他方，S^2 の北極を $N = (0,0,1)$，赤道面を $\mathbb{C}$ とするとき，立体射影 $\pi: S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ とは，点 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) \in S^2$ と N を直線で結んで，この直線が $\mathbb{C}$ と交わる点 (u, v) に対応させる写像のことである．簡単な計算で，

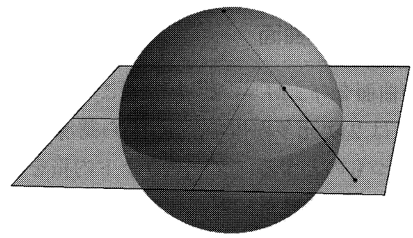


図 2　立体射影.

$$(u, v) = \Big(\frac{n_1}{1-n_3}, \frac{n_2}{1-n_3}\Big)$$

を得る．(11) を代入すると，

$$(u, v) = (\Re g, \Im g).$$

すなわち，$u + iv = g$ が得られ，g が単位法ベクトルの北極からの立体射影による像であることがわかった．

4. 例

よく知られている極小曲面のワイエルシュトラスデータを与える．グラフィックを見て，ガウス写像の動き（法方向がエンド＝曲面の端っこに向かってどう動いていくか）を見てみよう．矢印方向は次節で述べるガウス写像の**除外値**となっている．

- **(i)**　平面：$(g, hdz) = (c, dz)$, c は定数関数.
- **(ii)**　懸垂面（カテノイド)：$M = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(g, hdz) = \Big(z, \frac{dz}{z^2}\Big)$.
- **(iii)**　常螺旋（ヘリコイド)：$M = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(g, hdz) = \Big(z, \frac{idz}{z^2}\Big)$.
- **(iv)**　エンネッパの曲面：$M = \mathbb{C}$, $(g, hdz) = (z, dz)$.
- **(v)**　コスタ曲面：$M = T^2 \setminus 3$点, $(g, hdz) =$

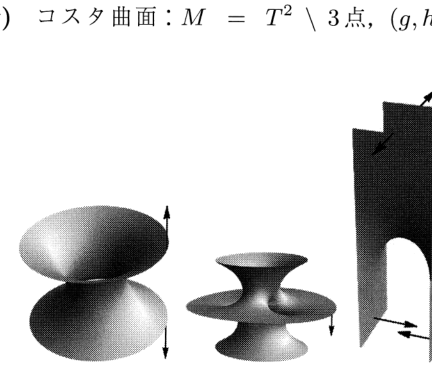


図 3　左から懸垂面, コスタ曲面, シャーク曲面のパーツ.

$\left(\dfrac{B}{w}, \dfrac{zdz}{w}\right)$, $w^2 = z(z^2 - a^2)$.

(vi) シャーク曲面：$M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{\pm 1, \pm i\}$, $(g, hdz) = \left(z, \dfrac{idz}{z^4 - 1}\right)$.

5. ガウス写像の除外値問題

複素関数論でよく知られている**ピカールの定理**は，全平面上の定数でない正則関数の除外値は高々一つであることを主張している．例えば $f(z) = e^z$ は 0 を唯一の除外値としてもつ．

我々は，g が M 上の有理型関数になることを既に示したから，ピカールの定理の観点から，M が**完備曲面**の場合にその除外値を調べることは興味深い．Osserman はこの除外値集合がキャパシティー 0 という小さい集合であることを示し，Xavier はさらにこれが有限集合であることを示した．最終解決は藤本坦孝氏の定理としてよく知られ，高々 4 つの除外値しかもち得ないこと，またシャーク曲面が 4 つの除外値をもつことから，この結果が最適であることが示された．

証明では M 上の 1 点から境界への距離と M のガウス曲率の間にある不等式が成り立ち，g が 5 点以上を除外すると，境界への距離が無限になるとき，ガウス曲率が 0 になる，つまり，平面になってしまうという形で示されるが，その過程で大変複雑な評価が必要である．

さて，この問題が解決されるより遥か以前に Osserman は極小曲面が**代数的極小曲面**と呼ばれる場合，つまり，コンパクト曲面から有限個の点を除いた曲面上で定義される完備極小曲面のとき，ガウス写像の除外値は高々 3 つであることを，Cohn–Vossen, Riemann–Hurwitz の定理から導いた（1964 年）．しかし今日に至るまで，代数的極小曲面のガウス写像で除外値を 3 つもつものは知られていない．

懸垂曲面の除外値は見てすぐ分かるように 2 であるが，これ以外に除外値 2 の例はほとんど知られていなかった．筆者は当初 3 点除外例が存在するかを調べ始めたが，この難題に挑戦するうちに，そもそも 2 点除外例はどの程度あるのかを調べてみようと考えた．そこで，**種数** 0,1 の基本的な例の構成を行い，その**分岐被覆**をとることにより，種数 0 なら 2 点以上，種数 1 なら 3 点以上，種数 4 以上なら 4 点以上の穴あきリーマン面の位相型をもつ代数的極小曲面のすべての場合に，ガウス写像が 2 点を除外するものを構成した．除外値方向が任意にとれる例も存在する（図 4，5 参照）．この結果は佐藤勝憲氏によりグラフィック表示され，宮岡–佐藤曲面と呼ばれている．とくにワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を用いて構成された種数 1 の例（後述）では，ガウス写像の次数が任意にとれ，無限個の例を与えている．

さて，この話を中央大学における恒例の Encounter with Mathematics で話したところ（2003 年 3 月），参加者の興味を引くことになった．一方，複素幾何の専門家はこのような問題は簡単で，微分幾何の人は何も知らない，といった反応をすることが多い．そして安易に手を出して痛い目に遭います．

6. 我々の失敗

ということで，始まったのが X 氏との共同研究である．これは現在も継続中なので，詳しくは書けないが，実際大変なことが起こった．

当初，超越的方法で取り組むことにより，除外値数が高々 2 であることが証明できたかに見えたが，その講演を控えていた前日に，X 氏の弟子の Y 氏が，宮岡–佐藤曲面の中に，その証明に対する反例があると宣言したのである．

これは除外値数に対する反例ではなく，同時進行の**全分岐値数**も 2 でおさえられるであろうという予想に対する反例である．宮岡–佐藤曲面の中でも最も単純と思われる曲面で，この全分岐値数が 2.5 のものが存在したのである！

これは整数値でないこと，従って除外値数とは異なるという 2 点で衝撃的であった．元の議論が正しければ，この値も 2 でおさえられねばならないので，議論は振り出しに戻った．ちなみに全分岐値数が 2 を越える例は，今日に至るまで宮岡–佐藤曲面のほかには見つかっていない．この発見はまさに奇跡的であった．

[宮岡–佐藤曲面 (i) 種数 0]

$M = S^2 \setminus \{\pm i, \infty\}$ とする．ワイエルシュトラスデータを

$$\begin{cases} g(z) = \sigma \dfrac{z^2 + 1 + a(t-1)}{z^2 + t}, & \\ h(z)dz = \dfrac{(z^2 + t)^2}{(z^2+1)^2} dz, & a, t \in \mathbb{R}, \\ & (a-1)(t-1) \neq 0 \end{cases}$$

で与えて，

$$\sigma^2 = \frac{t+3}{a\{(t-1)a + 4\}} < 0$$

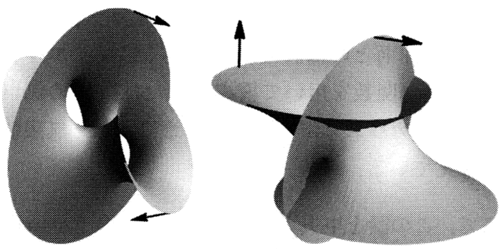


図 4　宮岡–佐藤曲面 (i)．左：$a=-2$ の場合，右：$a=6$ の場合．

とおくと，ガウス写像が 2 点 $\{\sigma, \sigma a\}$（体心点でない）を除外する代数的極小曲面の 2 径数族が得られる．全曲率は -8π である．

図 4 が上の反例を与えた "ショック曲面" である．除外値は a の与え方次第でいろいろな方向をとることができる．

さて，これは当時この研究に加わっていた Y 氏の学位にも関わり（氏の上記の発見の価値は高いが），何とかリカバーしようとあがいて得たのが，ガウス写像の次数と曲面のオイラー数の比で与えられる不変量 R である．周期条件をみたさない**擬代数的**と呼ばれる極小曲面に対しては $R \geq 1$ であるが，周期条件を課すと $R > 1$ となり，Osserman の結果を再証明することができる．さらに Osserman の議論にはなかった全分岐値数の評価もできるところがみそである．また，分岐被覆をとって得られる極小曲面については，ガウス写像の次数もオイラー数も変わってしまうが，この値だけは不変である．

余談であるが，我々はすぐにこの論文を海外誌に掲載し，国内外で失敗の経緯を説明している．

定理（川上–小林–宮岡 (2008)[4]）　基本領域 $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ をもつ擬代数的極小曲面を考える．ここにコンパクトリーマン面 $\overline{M}$ の種数を G，ガウス写像 g を $\overline{M}$ 上の写像と考えたときの次数を d とする．このとき，D_g を g の除外値数とすると，次が成り立つ．

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G-1+k/2} \geq 1. \quad (12)$$

さらに詳しく，g の除外値以外の（完全とは限らない）分岐値の数を l とすると，次が成り立つ．

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{d}. \quad (13)$$

一方 g の完全分岐値数 ν は

$$\nu \leq 2 + \frac{2}{R}. \quad (14)$$

をみたす．特に

$$D_g \leq 4, \quad \nu \leq 4 \quad (15)$$

であり，代数的極小曲面については，これらは真の不等号となる．(13), (14) ともに，代数的な場合もそうでない場合も最良の評価である．

ちなみに (i) の例では $d=2, G=0, k=3$ で $R=4$ となり，完全分岐値数は (14) により $\nu \leq 2+\frac{2}{4}=2.5$ で，まさに等号を与えている．除外値数は (13) より 2 以下でこの場合ちょうど 2 である．

[宮岡–佐藤曲面 (ii) 種数 1]

正方形トーラス $\overline{M}$ 上のワイエルシュトラスの $\wp$ 関数 $(\wp')^2 = 4\wp(\wp^2 - a^2)$ を考える．M を $\overline{M}$ から $\wp = 0, \pm a, \infty$ なる 4 点を除いたリーマン面とし，ワイエルシュトラスデータを

[Case 1] $g = \dfrac{\sigma}{\wp^j \wp'}$, $hdz = \dfrac{\wp d\wp}{\wp'}$, $j = 1, 2, 3 \ldots$,

[Case 2] $g = \dfrac{\sigma}{\wp^j \wp'}$, $hdz = \dfrac{\wp^{j+1} d\wp}{\wp'}$, $j = 2, 4, 6 \ldots$,

[Case 3] $g = \sigma \dfrac{\wp^3}{\wp'}$, $hdz = \dfrac{d\wp}{\wp\wp'}$

で与える．適当な σ を選ぶとガウス写像が 2 点 $0, \infty$ を除外する完備極小曲面を得る．Case 1,2 ではガウス写像の次数 $d = 2j+3$ で径数づけられ，$R = \frac{d}{2}$ だから，$2 + \frac{2}{R}$ をいくらでも $2 (= D_g)$ に近づけることができる．ちなみにコスタ曲面はこれらの曲面の仲間（$j=0$）ともいえるが，除外値数は 1 である．

R の値をあらゆる宮岡–佐藤曲面に対して求めることは本題の解決に大きなヒントを与える量となっているが，残念ながら最終解決に至るものではない．というわけで，現在行っているトライアルは，すべてを普遍被覆である円板に持ち上げてそこに Nevanlinna 理論を構築するというもので，R に対応する不等式は集

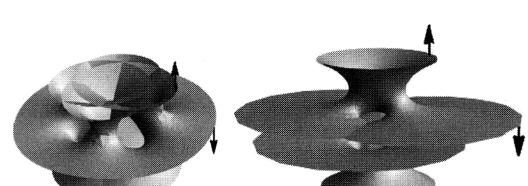


図 5　宮岡–佐藤曲面 (ii)．左：$j=2$ の場合，右：Case 3 の場合．

団的 Cohn–Vossen 不等式として拡張されている．

R についても，集団的 Cohn–Vossen 不等式についても大変面白いのは，一定負曲率をもつ**双曲計量**（これは曲面が双曲型であることを反映する）と，一定正曲率をもつ（特異）計量（これはガウス写像から誘導される）という両極端な計量による曲面の面積比が重大な役割を果たすという事実で，この研究の一つの神秘がここにある．

7. 球面の極小曲面

さて，話をもとに戻して，今度は 3 次元球面 S^3 の極小曲面を考えよう．**Lawson 対応**で，これは $\mathbb{R}^3$ の**平均曲率** 1 の曲面と対応することも興味の一つである．最も簡単なのは S^3 で全測地的な S^2 であり，この場合，$\mathbb{R}^3$ で対応するのはそのまま平均曲率 1 の球面である．

S^3 の極小曲面論と $\mathbb{R}^3$ の極小曲面論の大きな違いは S^3 には射影平面を除くすべてのコンパクト曲面が極小曲面として実現されることであり，これは Lawson により証明された．筆者は博士課程 1 年のときにこの論文を購読し，その完璧さにもうこれ以上やることはないとまで思ってしまった．そこでは球面測地多角形を境界にもつ Plateau 問題を解いて，辺に関する鏡映で曲面をコンパクト曲面に作り上げるという大変美しい理論が展開されている．球面上で Plateau 問題が解けるという部分は Morrey の解析に頼っているものの，この手法は現在なお，コンパクト曲面を構成する際に用いられる有力な道具となっている．

Lawson はこの論文で徹底的に複素数表現を用いており，筆者も以後，極小曲面を研究する際は常に複素数表現を用いることとなった．このため，実座標で書かれている論文には親近感がわかない．

さて，$\psi : M \to S^3$ が極小曲面である必要十分条件は，等温座標 z により，$\mathbb{R}^3$ のときと同様の記号を用いると，

$$\partial\bar{\partial}\psi = -F\psi \tag{16}$$

をみたすことである．この議論は**複素射影空間** $\mathbb{C}P^n$ の極小曲面論を知っていれば，その特殊な場合とわかるので，以下 $\psi : M \to \mathbb{C}P^n$ の極小曲面に話を拡張しよう．すると実は戸田方程式が現れる．

戸田方程式の話を，ちょっと補足しておこう．いくつかの連なったバネの運動を記述するのが 1 次元戸田方程式で，バネの個数が有限か，無限か，また有限でもちょん切れているか，どこかで閉じて周期的になるかで様子は変わってくる．この方程式は，可積分系として，**ソリトン解**の存在や，無限個の**第 1 積分**の存在などが知られ，古くからよく研究されている．

しかし，この方程式の 2 次元版が上記の極小曲面を表す方程式に対応することが分かったのは 1980 年代のことである．以前にもどこかで書いたが，イギリス，ダーラム大学の Bolton 教授と，故 Woodward 教授の研究を横目で見た物理学者がこれは戸田方程式だと指摘したのが始まりである．向こうの大学でよくあるコーヒータイム（イギリスでもこう言う）の産物らしい．日本ではなかなかこのように数学と物理（などの諸分野）の関わりが日常的にもてる機会はない．

8. Lawson 予想

Lawson 予想と呼ばれるものにはいろいろあるが，ここでは次の未解決問題について触れる．3 次元球面に極小曲面が実現されるためには**球面リッチ条件**という計量に関する条件が必要である．これは曲面の計量を ds^2 とするとき，$\sqrt{1-K}ds^2$ が平坦になるという条件である．Lawson は高次元の球面の極小曲面がこの条件をみたすとき，この極小曲面は 3 次元球面の極小曲面の和に分解されると予想した．ユークリッド空間では対応する問題が Lawson 自身により解決されている．しかし球面の場合は，平坦な場合にすぐに反例が見つかる．

この問題を助手になった頃に部分的に解いて，日米セミナーという国際研究集会で発表したのがきっかけで，ボン大学に 1 年招聘していただいたことはどこかに書いた．高階微分を求めて，曲面のフレームを作っていくことで低次元の場合にこの問題を解決したのだが，その後 20 年くらい放っておいた．

それがひょんなきっかけで再燃することになった．

9. 球面の極小曲面と複素射影空間の極小曲面

$\phi : M \to S^n$ を球面の極小曲面とするとき，合成写像：$M \to S^n \to \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ を考えるとこれは複素射影空間の極小曲面の特殊なものとなっていることがわかる．その意味で複素射影空間の極小曲面は球面の極小曲面の「親玉」に当たり，これを調べればその特殊ケースとして球面の極小曲面がわかる．

曲面から複素射影空間への写像 $\phi : M \to \mathbb{C}P^n$ は $M \times \mathbb{C}^{n+1} \to M$ の複素部分線束 L と対応するのでその局所断面を $f = f_0 : U \to L$ とする．そのフレームを

$$f_{j+1} = \partial\Big(\frac{\partial}{\partial z} \otimes f_j\Big)$$

で与える．ここに z は M の局所複素座標である．すると次の関係式が成り立つ[1)]．

$$f_{j+1} = \partial f_j - \partial \log |f_j|^2 f_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$
$$\bar\partial f_j = -\frac{|f_j|^2}{|f_{j-1}|^2} f_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

この可積分条件 $\partial\bar\partial f_j = \bar\partial\partial f_j$ は，$w_j = \log|f_j|$ とおくとき，

$$2\partial\bar\partial w_j - e^{2(w_{j+1}-w_j)} + e^{2(w_j - w_{j-1})} = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{17}$$

で与えられ，これがまさに 2 次元戸田格子方程式となっている．特に ψ が S^n の極小曲面 $f : M \to S^n$ から得られる場合は，$|f| = 1$ をみたす $f_0 = f$ をとることができるから，さらに

$$f_{-j} = (-1)^j \frac{\bar f_j}{|f_j|^2}, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

が成り立つ．特にこれが**超共形的**と呼ばれるものの場合（$n = 3$ では常にそうなる），$\sum_{j=0}^n w_j = 0$ をみたし，これは戸田方程式の周期解と対応する．$n = 3$ の場合 (18) を使うと，$w = w_1$ に対し (17) が **sinh-Gordon 方程式**

$$\partial\bar\partial w + \sinh w = 0$$

となることが容易にチェックできる．

S^3 の極小曲面は $\mathbb{C}P^3$ への超共形的調和写像と考えられることと，$e^w|dz|^2$ が曲面の誘導計量であることから，（少々計算をすると）球面リッチ条件とはまさに w が sinh-Gordon 方程式をみたすことと同値となる．従って，戸田方程式の周期解と対応させることにより，これを反復する，つまり $w_{3+j} = w_j$ とすることにより，高次元に埋め込まれた極小曲面と対応することが分かる．その逆問題が Lawson 予想にほかならない．

10. 戸田方程式の不思議

戸田方程式が球面，あるいは複素射影空間の極小曲面論と深く結びついていることは上記のように，Bolton らにより発見された．1980 年代から盛んになって来た可積分系理論と幾何学の関係において（Uhlenbeck の貢献が大きい），幾何学者が可積分系理論を身近なものと考えるきっかけができてきた．筆者も Z 氏とともに，勉強会を年 2 回開き，継続して佐藤理論などを勉強した．

その中で戸田方程式が先の Lawson 予想と結びつくことに気付き，若い頃の研究テーマが復活したのである．球面リッチ条件はまさに戸田方程式（というか，この場合 sinh-Gordon 方程式）であり，これを計量がみたす場合の高次元球面の極小曲面の 3 次元球面の極小曲面との間の関係を明らかにすることが Lawson 予想解決の本質と気付いた．そこで戸田方程式の周期解をさらに繰り返すことで高次元の極小曲面ができること，バイポーラー写像がその 1 つの例であること，また，これは 3 次元の球面に限らず，奇数次元球面の超共形的極小曲面は対応する戸田方程式の反復解と自然に対応することがわかった．その逆が正しいかというのが（拡張された）Lawson 予想にほかならない．この発想で高次元の場合にも予想の部分解決ができ，Crelle に論文を発表した[6)]．ただし，最終解決にまではまだ至っていない．

Lawson の論文も決してもうこれ以上やることがないのではなく，バイポーラー写像にせよ，Lawson 予想にせよ，まだまだ豊富な問題を含んでいることが 40 年近くかかって分かってきた．真によい論文というのはそういうものであろう．

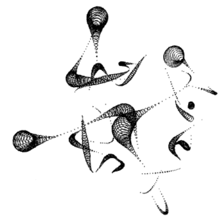
参考文献

1) J. Bolton and L.M. Woodward, The affine Toda equations and minimal surfaces, In *Harmonic Maps and Integrable Systems* (1994), 59–82.
2) S.S. Chern, An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. A.M.S.*, **6** (1955), 771–782.
3) B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3, *Ann. of Math.*, **92** (1970), 335–374.
4) Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces, *Forum Math.*, **20** (2008), 1055–1069.
5) R. Miyaoka and K. Sato, On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions, *Archiv der Math.*, **63** (1994), 565–576.
6) R. Miyaoka, The family of isometric superconformal harmonic maps and the affine Toda equations, *J. reine angew. Math.*, **481** (1996), 1–25.
7) 宮岡礼子，極小曲面と変分問題，「数理科学」**48-10** (2010), 30–36.

（みやおか・れいこ，東北大学大学院理学研究科）

複素関数の微積分からリーマン面のモジュライ空間へ

タイヒミュラー空間論への道すじ



藤川 英華

本論説では，まず，正則関数の剛性に着目し，正則関数の定義域を拡張するという考え方がリーマン面という概念に昇華する様子を要約する．リーマン面のモジュライ空間は正則関数の剛性ゆえに構成を難しくしているが，剛性を解除して擬等角写像を用いた複素構造の変形理論は，タイヒミュラー空間論として発展し，あらゆるリーマン面のモジュライ空間に統一的な視点を与えることに成功した．後半では，特に無限次元タイヒミュラー空間の複素解析的な理論を概観する．

1. 正則関数

複素関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で微分可能であるとは，

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在することである．この極限値を微分係数 $f'(z_0)$ で表す．複素平面 $\mathbb{C}$ の領域 D の各点で f が微分可能なとき，f は D 上正則であるという．形式的には実数を複素数にしただけの複素微分可能性の定義だが，実数のときとは違い，豊富な内容を持つことが比較的容易に分かる．以下でそれをみてみよう．

まず，微分可能性の定義式を

$$f(z)-f(z_0) = a(z-z_0)+o(z-z_0) \quad (z-z_0 \to 0)$$

と書き直してみる．ここで $a = f'(z_0)$ である．$o(z - z_0)$ は $z - z_0$ に比べて無視できるのでこれを1次式とみなす（線形近似する）と，$f(z)-f(z_0)$ は $z - z_0$ の複素数 a 倍ということである．複素数 $a = re^{i\theta}$ をかけるという操作は，複素平面上の θ 回転と r 倍拡大の合成である．すなわちベクトルの角度を保つ $\mathbb{R}^2$ の線形変換であり，行列で表せば

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

の形である．f を $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ とおいて実2変数から実2変数への写像とみなすと，ヤコビ行列がこの形であるので，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

をみたすことがわかる．これを**コーシー・リーマンの方程式**という．

$$\bar{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right\}$$

とおくと，コーシー・リーマンの方程式は $\bar{\partial} f(z) = 0$ と同値である．また，$f'(z_0) \neq 0$ である限り，正則関数 f は z_0 における2つの接ベクトルのなす角度を保つ．これを**等角性**という．

コーシー・リーマンの方程式から**コーシーの積分定理**が従う．すなわち，滑らかな境界 $c = \partial\Omega$ をもつ任意の有界多重連結領域 Ω で閉包が D に含まれるものに対して，

$$\int_c f(z)dz = 0$$

が成り立つ．ここで，曲線 c に沿う $f(z)dz$ の線積

分は，c の正の向きに順番に点をとった分割 $\{z_i\}_i$ に対してつくるリーマン和 $\sum_i f(z_i)(z_{i+1}-z_i)$ の分割を細かくしていったときの極限で定義する．左辺の線積分に，微分積分学の基本定理の 2 次元版に相当するグリーンの公式を f の適当な滑らかさの仮定の下（コーシーの積分定理自身はこの仮定はなくてもいい）適用すると

$$\int_c f(z)dz = \iint_\Omega \bar{\partial} f(z) dz \wedge d\bar{z}$$

を得る．よって $\bar{\partial} f(z) = 0$ より積分は 0 となる．

コーシーの積分定理から，まず正則関数の**原始関数の存在**がわかる．すなわち任意の単連結部分領域 $\Omega \subset D$ と $z, z_0 \in \Omega$ に対して $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ が定義でき，$F'(z) = f(z)$ が成り立つ．また，閉円板 $B(z,r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| \le r\}$ が D に含まれるとき，中心 z での値は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

で与えられる（**コーシーの積分公式**）．なぜなら，コーシーの積分定理より上記の線積分は半径 r によらず一定値であり，$r \to 0$ とすれば中心での値に収束するからである．

コーシーの積分公式において $1/(\zeta - z)$ を z の関数として微分すること，およびべき級数展開することを考える．これらの操作と ζ に関する積分を交換することにより以下がわかる：領域 D 上の正則関数 $f(z)$ は任意の $n \ge 0$ に対して，n 階導関数 $f^{(n)}(z)$ をもつ．また D に含まれる任意の開円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

とべき級数展開され，この級数は $|z - z_0| < r$ の各コンパクト集合上で一様収束し，各係数は

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

となる．したがって，正則性と**解析性**は同値である．

2. 解析接続

正則関数の解析性がその剛性（簡単には変形を許さない性質）の根源である．局所的には**一致の定理**により，集積点をもつ点列上で同一の値をとる正則関数は恒等的に等しくなければならない．あるいは，ある点ですべての導関数の値が等しい正則関数は一致する（C^∞-級関数はこれをみたさないことに注意する）．大域的には，例えば，複素平面全体で有界な正則関数は定数関数に限られる（**リュービルの定理**）．しかし，この剛性を伴う解析性が最も顕著に現れるのは，正則関数の解析接続ではないだろうか．

複素平面の点 z_0 の近傍で定義された解析関数 f（あるいは収束べき級数の係数）が与えられたとする．これを解析関数（正則関数）の芽あるいは**関数要素**という．z_0 中心のべき級数展開で表せば，f は収束円内の正則な関数に拡張することができる．しかし，またその収束円内の点 z_1 をとり，その点を中心とする f のべき級数展開をとれば，z_1 における関数要素が定まり，新しい収束円内で正則な関数に拡張することができることもある．このようにして解析関数の定義域を拡張する操作を**解析接続**という．解析接続の一意性は正則関数の剛性が保証している．べき級数の中心となる点列 $z_0, z_1, z_2, \ldots$ を，z_0 を始点とする曲線 $c = \{z(t)\}_{t \ge 0}$ 上からとるとすれば，解析接続および関数要素の変形を連続的な操作として捉えることができる．

例えば $f(z) = \sqrt{z}$ の $z_0 \ne 0$ における関数要素をとる．べき級数の収束円板は原点 0 を通る円周の内側である．z_0 を始点とする曲線 c に沿う解析接続を考える．もし，c が原点のまわりをまわらずに始点 z_0 に戻る閉曲線である場合には，解析接続をして z_0 に戻ってきた関数要素ははじめの関数要素と一致している．しかし，c が原点のまわりを 1 回まわる閉曲線の場合は，関数要素ははじめの関数要素の -1 倍となる．2 回まわればもとに戻る．同様のことを $f(z) = \log z$ に対して考える．今度は原点のまわりを 1 回まわれば関数要素は $2\pi i$ の和だけ変化する．一般に正負の向きも考慮して n 回（$n \in \mathbb{Z}$）まわれば $2\pi i n$ の変化が起こる．

このように，与えられた関数要素 f_{z_0} から出発して，可能な限りの解析接続を行って正則関数の定義域を最大限に拡張することを考える．ただし，上の例のように同じ点 z_0 でも解析接続の結果できた新しい定義域の点で，異なる関数要素を定めるものであれば別の点とみなす．より正確には，複素平面の点 z と z_0 から z までの曲線 c の組 (z,c) の集合を関数要素の一致に関する同値関係で割って得られる集合を定義域 S と考える．S は複素平面の上に連結して層状に重なっている領域のようなものとして理解できる．もとの関数要素 f_{z_0} からみれば，それから生成される正則関数を定義し得る最大の領域が与えられたことになり，これを f_{z_0}（が生成する正則関数）の**存在領域**という．解析関数の剛性により，存在領域 S は関数要素から一意的に定まる．したがって，このような存在領域全体を考えてそれを分類しようとすれば，本質的には関数要素全体（の同値類）を考えることにほかならない．しかし，その多様性はあまりにも大きい．例えば，複素平面上の任意の領域は，ある正則関数の存在領域となることが知られている．

3. モジュライ問題

リーマン[7] の視点は，関数要素の存在領域の分類を位相型を固定して行うことである．例えば，種数1の閉曲面 Σ を与える．関数要素の存在領域 S のうち，上の例の $\sqrt{z}$ の原点のような点を分岐点として付け加えた**解析形体** $\overline{S}$ が Σ と同じ位相型になるものを分類する．

まず $\overline{S}$ の形状の正規化を行う．S を定義域とした正則関数は，適切な意味で $\overline{S}$ からリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ への正則写像と考えることができる．このような正則写像は，$\overline{S}$ の位相型を考慮すれば，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の2重周期関数（楕円関数）を用いて表現することができる．正則写像 $\overline{S}\to\widehat{\mathbb{C}}$ を与えることは，$\widehat{\mathbb{C}}$ を分岐しながら連続的に層状に覆っている領域（**正則分岐被覆**）として $\overline{S}$ を実現することと同値である．楕円関数としてワイエルシュトラスの $\wp$ 関数をとり，$\overline{S}$ を正則同型写像で写せば，$\overline{S}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の4点で分岐して2重に被覆する領域となることがわかる．4点としては $0,1,\infty$ とそれ以外の1点 λ をとることに帰着できる．

上記の正規化により，種数1の閉曲面の位相型をもつ正則関数の解析形体は，$\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}$ の定める解析形体と正則同型であり，これらの分類は複素パラメーター λ により与えられる．すなわち，自由度は複素1次元だけある．これを種数1の閉曲面の**モジュライ数**という．一般に種数 g の閉曲面に対しても同様に問題を設定できる．議論はより複雑になり，$\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像の存在を示すために用いられたディリクレ原理に不備はあったが，リーマンは複素 $3g-3$ 次元の自由度が必要となることをみてとった．

4. リーマン面

リーマン面の現代的な定義はワイル[8] による．すなわち，**1次元複素多様体**をリーマン面という．簡単にいえば，曲面の各点の近傍から複素平面のある開集合への同相写像（局所座標）があり，近傍の重なり方から定まる複素平面の開集合の貼り合わせ写像（座標変換）が正則となっていることである．複素平面に無限遠点を付け加えたリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ は最も単純な非自明なリーマン面である．リーマン面間の写像が正則であることは，局所座標を通した対応が正則関数となっていることで定義できる．リーマン面 R からリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像を考えることは，上でみたように R を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に分岐しながら広がる領域として表現することと等しい．

さて，関数要素の解析接続のときと同様に，リーマン面 R 上に基点 p_0 をとり，任意の点 $p\in R$ と p_0 から p までの曲線 c の組 (p,c) を考える．その全体を c の端点を止めるホモトピーによる同値で割った同値類の集合を考える．これを R の**普遍被覆**といい，$\widetilde{R}$ で表す．R の局所座標を用いて $\widetilde{R}$ にも局所座標が与えられリーマン面となり，自然な射影 $\widetilde{R}\to R$ は正則写像である．また非自明な閉曲線が消されるので $\widetilde{R}$ は単連結である．このと

き，**一意化定理**は次を主張している：単連結リーマン面 $\widetilde{R}$ は，リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$，複素平面 $\mathbb{C}$，単位円板 $\mathbb{D}$ のいずれかに正則な同相写像で写る．正則な同相写像のことを等角写像といい，その写像で写り合う関係を等角同値という．**リーマンの写像定理**は一意化定理の大きなステップであり，複素平面内の単連結真部分領域は $\mathbb{D}$ と等角同値であることを主張している．

一意化定理によりリーマン面には普遍被覆を通して標準的な計量が入る．$\widehat{\mathbb{C}}$ は球面計量，$\mathbb{C}$ はユークリッド計量をもつが，単位円板 $\mathbb{D}$ は双曲平面のポアンカレによるモデルとして**双曲計量** $2|dz|/(1-|z|^2)$ をもつ．双曲計量はリーマン面の幾何を考える上での本質的な重要性をもつ．

正則関数に対する最大値の原理より，f が $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への正則関数で $f(0)=0$ ならば $|f(z)| \leq |z|$ が成り立つ（**シュワルツの補題**）．これを計量の言葉に直すと，双曲距離 $d_{\mathbb{D}}$ の正則写像 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ に関する縮小原理 $d_{\mathbb{D}}(f(z_1),f(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1,z_2)$ がわかる．この性質は，双曲計量をもつリーマン面間の正則写像に対しても成立する．また $\mathbb{D}$ の双曲計量に関する等長変換群が $\mathbb{D}$ の等角自己同型群と一致し，それが $\mathbb{D}$ を保つ一次分数変換群（メビウス変換群）となること（シュワルツ–ピックの定理）も示される．普遍被覆面が $\mathbb{D}$ であるリーマン面 R については，被覆変換群は $\mathbb{D}$ の等角自己同型群の離散部分群 Γ である．これは $\mathbb{D}$ に作用する**フックス群**と呼ばれ，リーマン面 R は商空間 $\mathbb{D}/\Gamma$ という形で表現することが可能になる．

リーマン面の**モジュライ空間**とは，リーマン面の等角同値類の空間である．上でみたリーマンのモジュライ問題に始まり，モジュライ空間に対しては，数学の様々な分野で多種多様の手法によって研究が行われてきた．しかし，リーマンの時代に比べて最も大きな進歩は，一意化定理により双曲計量をもつリーマン面のフックス群による表現が与えられたことによりもたらされた．リーマン面 R が**有限型**であるとは，R がコンパクト面から高々有限個の点が除かれたものであるときをいう．有限型ではないリーマン面を無限型という．有限型リーマン面のモジュライ空間は有限次元である．リーマンはモジュライ数としてそれを看破していた．実際，有限型リーマン面は，リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の有限葉の分岐被覆から高々有限個の点を除いたものとして表すことができる．しかし，一意化定理の威力の一つは無限次元のモジュライ空間も同時に定式化できる点にある．

5. 擬等角写像

リーマン面のモジュライ問題の転機は，擬等角写像による等角構造の変形理論が導入されたことによりもたらされる．正則写像はその剛性により，局所的な変形が全体に影響する．したがって，リーマン面の構造の変形を考える上では不向きな写像である．それに対して擬等角写像は，等角性の歪みを一様に押さえながら剛性を解除し，自由度の大きい変形を可能にするものである．

擬等角写像の雛形は一方向へのアフィン拡大写像 $f_K(x,y)=Kx+iy$ $(K\geq 1)$ である．等角性の歪みは定数 K で与えられる．これを歪曲度という．複素平面の領域 D の向きを保つ微分同相写像が擬等角写像であるとは，各点の接空間では微分が等角線形変換の差を除いて上記の線形写像 f_K であり，歪曲度 K が点によらず一様に上から押さえられていることをいう．

タイヒミュラーは，リーマン面を上のような擬等角変形を行っても整合性がくずれないようなユークリッド平面の部分の貼り合わせで表した．より正確には，リーマン面上の可積分正則 2 次微分形式 $\varphi(z)dz^2$ を用いて（特異性をもつ）ユークリッド座標を導入した．典型的な例では，いくつかのユークリッド円筒の境界（円周）を，角をつくりながら接合していくと閉リーマン面が構成される．各円筒の円周方向には長さをかえず，高さ方向に K 倍に引き延ばす f_K のような変形を各円筒上で行ってリーマン面全体を変形する．タイヒミュラーの示したことは，任意の有限型のリーマン面 R は，同じ位相型のある固定されたリーマン面 R_0 から上記の変形で得られること，したがって，有限

型のリーマン面の変形は R_0 の可積分正則2次微分形式により表現され，その自由度はその空間の次元分あることである．とくに種数 g の閉リーマン面に対しては，複素 $3g-3$ 次元（ただし $g=1$ のときは1次元）の変形空間が与えられた．

タイヒミュラーの理論はその後，アールフォルスとベアスらによって整理され，上記の空間にはタイヒミュラー空間[6] という名前がつけられた．その中でも擬等角写像の理論の進展が大きな役割を担っている．微分同相写像に対して擬等角性を説明したが，実際には微分可能性を仮定しないで定義したほうがさらに使いやすく，また写像族の完備性も保証できるものとなる．

f を領域 D 上の向きを保つ同相写像とする．複素微分

$$\partial f(z)=\frac{1}{2}(f_x-if_y),\quad \bar{\partial} f(z)=\frac{1}{2}(f_x+if_y)$$

が超関数の意味で（局所可積分関数として）存在し，$K\geq 1$ に対して，

$$\frac{|\partial f(z)|+|\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)|-|\bar{\partial} f(z)|}\leq K$$

が D 上のほとんどいたるところの z で成り立つとき，f は**K-擬等角写像**であるという[1]．このような K のうちで最良の定数を f の**最大歪曲度**という．全微分 $df=\partial f dz+\bar{\partial} f d\bar{z}$ を

$$(|\partial f|-|\bar{\partial} f|)|dz|\leq |df|\leq (|\partial f|+|\bar{\partial} f|)|dz|$$

のように評価すれば，K が等角性の歪みを押さえる定数であることがわかる．コーシー・リーマンの方程式 $\bar{\partial} f(z)=0$ より，等角写像は1-擬等角写像である．逆に，1-擬等角写像は滑らかであることがわかり（ワイルの補題），通常の意味での等角写像となる．リーマン面間の写像の擬等角写像も局所座標を介しての擬等角性として定義できる．

擬等角写像 f に対して，$\mu_f(z)=\partial f(z)/\bar{\partial} f(z)$ は $\|\mu_f\|_\infty<1$ をみたす可測関数になり，これを**歪曲係数**という．逆に $\|\mu\|_\infty<1$ をみたす領域 D 上の関数 μ に対して，それを歪曲係数としてもつ D 上の擬等角写像を求める問題が考えられる．方程式 $\bar{\partial} f(z)=\mu(z)\partial f(z)$ を**ベルトラミ方程式**という．D 上のユークリッド計量 $|dz|$ と μ に対して，D 上のリーマン計量を $|dz+\mu(z)d\bar{z}|$ により与える．この計量の等温座標系 (D',ζ)，すなわち，座標の対応 $\zeta\mapsto z$ により計量が $\lambda(\zeta)|d\zeta|$ の形で与えられる座標系をみつけるという問題は古典的であり，μ の滑らかさを仮定すれば既に解の存在は証明されていた．このとき，対応 $z\mapsto\zeta$ に定義される写像 $f:D\to D'$ は μ を歪曲係数としてもつ擬等角写像となる．アールフォルスとベアスは，任意の可測関数 μ に対してベルトラミ方程式の解の存在を証明し，さらに μ に対する擬等角写像 f^μ の正則依存性までも示した．この**可測リーマン写像定理**として知られている定理がタイヒミュラー空間の定式化に決定的な意味を与えた．

6. モジュライ空間

リーマン面のタイヒミュラー空間は，その等角構造（複素多様体としての複素構造と考えても正則写像の等角性より同じである）の変形空間として定義される．正確な定義は次節で与える．では，位相型を固定したとき，同相なリーマン面全体（曲面に入る複素構造全体）の空間であるモジュライ空間は，タイヒミュラー空間によりどのように表現されるものであろうか．モジュライ空間は複素構造の分類空間である．正則写像の剛性により，リーマン面は内在的な方法では変形しにくい．しかし，リーマンの考えたように分岐被覆の分岐点の位置情報のような外因的な障害を用いて，構造の違いを分別することはできる．それに対して，タイヒミュラー空間は，擬等角写像によりリーマン面を別のリーマン面に同相に変形することで得られる．内在的な構造の変形という点に着目するならば，一つの固定したリーマン面 R に入るリーマン計量 $|dz+\mu(z)d\bar{z}|$ のある同値類の空間とみなすこともできる．変形はあらゆる方向に限りなく続く．その過程でもとの等角構造と同じものに戻ることもある．変形前と後で同じ等角構造をもつ2つのリーマン面 R の違いは位相的な標識の違いという言葉で表現される．位相的な標識とは，連続的な変形の結果生じる R の自己同相写像のホ

モトピー類（**写像類**）のことである．

リーマン面の写像類全体のなす群を写像類群という．擬等角写像による変形で現れる位相的な標識のとりかえは，擬等角自己同相写像により引き起こされるので，一般にはこのような写像類（擬等角写像類）に制限して写像類群を考える．擬等角写像類群はタイヒミュラー空間に位相的な標識のとりかえとして作用しており，モジュライ空間は，その商空間として得られるものである．よって，任意のリーマン面のモジュライ空間を考察することは，そのタイヒミュラー空間と擬等角写像類群をみることに等しくなる．一意化定理により，任意のリーマン面がその普遍被覆を被覆変換群により表せるようになったことと同じである．

7. タイヒミュラー空間

リーマン面 R の**タイヒミュラー空間** $T(R)$ とは R の等角構造（複素構造）の擬等角写像による変形空間である[6]．具体的には，R の擬等角同相写像全体の空間に次の同値関係を入れたものである：R 上の擬等角写像 f, g が同値であるとは，$f(R)$ から $g(R)$ への等角写像 h が存在して，$g^{-1} \circ h \circ f$ が R の無限遠境界を固定するホモトピーによって恒等写像にホモトピックであることである．f の同値類を $[f]$ で表す．タイヒミュラー空間には，擬等角写像の最大歪曲度 K で変形の度合いを測ることにより，タイヒミュラー距離 d_T と呼ばれる完備な距離が定義できる．タイヒミュラー空間には，正則二次微分の空間をモデルにして複素構造が入り，複素多様体となる．有限型リーマン面に対しては有限次元であるが，無限型リーマン面に対しては無限次元になり，局所コンパクトでもない．タイヒミュラー距離は複素多様体としての小林距離と等しいことが分かっている．

リーマン面 R の**擬等角写像類群** $\mathrm{MCG}(R)$ とは，R の擬等角自己同相写像 g のホモトピー同値類 $[g]$ 全体のなす群のことである．擬等角写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ の各元 $[g]$ はタイヒミュラー空間 $T(R)$ に $[g]_* : [f] \mapsto [f \circ g^{-1}]$ によって等長かつ双正則に作用している．よって，$\mathrm{MCG}(R)$ から $T(R)$ の双正則自己同相写像群 $\mathrm{Aut}(T(R))$ への準同型 ι $([g] \mapsto [g]_*)$ が得られ，この準同型の像 $\iota(\mathrm{MCG}(R))$ を**タイヒミュラーモジュラー群**といい，$\mathrm{Mod}(R)$ で表す．この準同型はいくつかの例外的なリーマン面を除いて単射であるが，全射であるかどうかは無限次元タイヒミュラー空間の中心的問題であった．いくつかの部分的解答ののち，近年，Markovic[5] により肯定的に完全に解決された．つまり，$\mathrm{Mod}(R) = \mathrm{Aut}(T(R))$ である．

8. タイヒミュラーモジュラー群の不連続性

リーマン面 R のモジュライ空間 $M(R)$ は，タイヒミュラー空間 $T(R)$ のタイヒミュラーモジュラー群 $\mathrm{Mod}(R)$ による商空間 $T(R)/\mathrm{Mod}(R)$ として与えられる．したがって，$\mathrm{Mod}(R)$ の $T(R)$ への作用を調べることが $M(R)$ の考察の方法である．有限次元タイヒミュラー空間上では，タイヒミュラーモジュラー群の作用が真性不連続であることから，モジュライ空間にはよい構造が入る．実際，正規複素多様体になる．しかし，無限次元タイヒミュラー空間上では一般にはそうとは限らない．ここで，無限次元タイヒミュラー空間上でのタイヒミュラーモジュラー群の作用の不連続性を定義する．$\mathrm{Mod}(R)$ の部分群 Γ がタイヒミュラー空間の点 p に**不連続**に作用するとは，p のある近傍 U があって，$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ は有限個であることをいう．タイヒミュラーモジュラー群のタイヒミュラー空間への作用が等長あることより，これは次のことと同値である：軌道 $\Gamma(p)$ は離散集合で，$\gamma(p) = p$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ は有限個である．Γ が不連続に作用する点の集合を**不連続領域**といい $\Omega(\Gamma)$ で表す．有限型リーマン面 R に対しては $\Omega(\mathrm{Mod}(R)) = T(R)$ である．

しかし，一般には無限型リーマン面に対しては $\Omega(\Gamma)$ は $T(R)$ の真部分集合である．不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ の補集合を**極限集合** $\Lambda(\Gamma)$ と定義する．つまり，$\Lambda(\Gamma)$ の点 p とは，相異なる元の列 $\{\gamma_n\} \in \Gamma$ が存在して，$d_T(\gamma_n(p), p) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる

ことである．不連続領域，極限集合の概念は，もともと，複素解析学ではクライン群論において考えられていた．また，複素力学系の理論におけるファトウ集合，ジュリア集合も同様の概念である．これらの研究が無限次元タイヒミュラー空間論に取り入れられた[2]．

9. 新しいタイヒミュラー空間とモジュライ空間

無限型リーマン面のタイヒミュラー空間の理解のために，リーマン面全体における変形を見るのではなく，無限遠の周辺のみの変形を見る立場がある．それがリーマン面 R の**漸近的タイヒミュラー空間** $AT(R)$ である[4]．具体的には，タイヒミュラー空間の定義における h が（等角写像に限らず）**漸近的等角写像**にとれるという同値関係を考えるものである．ここで，R 上の擬等角写像が漸近的等角であるとは，R の無限遠に行くほど歪曲係数が 0 に近づく，つまり等角写像に近づくことである．等角写像は漸近的等角であるので，タイヒミュラー空間 $T(R)$ から漸近的タイヒミュラー空間 $AT(R)$ には自然な射影 $\pi: T(R) \to AT(R)$ がある．漸近的タイヒミュラー空間 $AT(R)$ にも正則二次微分の空間の商空間をモデルとして複素構造が入る．有限型リーマン面に対しては $AT(R)$ は 1 点に退化するが，無限型リーマン面に対しては無限次元になる．また，$AT(R)$ にはタイヒミュラー空間上のタイヒミュラー距離から導かれる完備な距離が入る．しかし，これが $AT(R)$ 上の小林距離と一致するかどうかはまだ分かっていない．

擬等角写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ の各元は射影 π のファイバーを保って作用するので，$AT(R)$ 上にも自然に作用し，その作用は等長かつ双正則である．よって，$\mathrm{MCG}(R)$ から $AT(R)$ の双正則自己同相写像群 $\mathrm{Aut}(AT(R))$ への準同型 ι_{AT} が得られる．準同型 ι_{AT} による像 $\iota_{AT}(\mathrm{MCG}(R))$ を漸近的タイヒミュラーモジュラー群といい，$\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ で表す．タイヒミュラー空間の場合とは異なり，ι_{AT} は例外的な R を除き全射でも単射でもない．とくに漸近的自明写像類群 $\mathrm{Ker}\,\iota_{AT}$ は自明ではない．

最後に，無限型リーマン面のモジュライ空間について考察したい．始めにも述べたように，一般には $T(R)/\mathrm{Mod}(R)$ にはよい構造が入らない．そこで，$\mathrm{Mod}(R)$ の部分群による商空間を考えてモジュライ空間の代わりとする方法がある．タイヒミュラー空間の擬等角自明写像類群 $\mathrm{Ker}\,\iota_{AT}$ による商空間 $IT(R) = T(R)/\mathrm{Ker}\,\iota_{AT}$ を**中間タイヒミュラー空間**と定義する[3]．$IT(R)$ はタイヒミュラー空間 $T(R)$ とモジュライ空間 $M(R)$ の間に位置し，また $T(R)$ と漸近的タイヒミュラー空間 $AT(R)$ の間にも位置する．リーマン面が有界幾何をもつ（双曲計量に関する単射半径がカスプ近傍を除いて上下から有界である）場合には，擬等角自明写像類群のタイヒミュラー空間への作用は不連続かつ自由であることが証明でき，$IT(R)$ にはタイヒミュラー空間からの複素構造が自然に入り，複素多様体となる．また，タイヒミュラー距離から導かれる $IT(R)$ 上の距離は小林距離と一致する．この場合，$IT(R)$ の双正則自己同相写像群 $\mathrm{Aut}(IT(R))$ は漸近的タイヒミュラーモジュラー群 $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ と同型であることがわかる．

参考文献

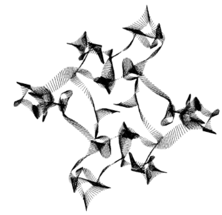
1) L.V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966 (2nd ed. AMS, 2006).
2) E. Fujikawa, Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 117–126.
3) E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Stable quasiconformal mapping class groups and asymptotic Teichmüller spaces, *Amer. J. Math.* **133** (2011), 637–675.
4) F.P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Mathematical Surveys and Monographs **76**, Amer. Math. Soc., 2000.
5) V. Markovic, Biholomorphic maps between Teichmüller spaces, *Duke Math. J.* **120** (2003), 405–431.
6) 今吉洋一，谷口雅彦，『タイヒミュラー空間論』，日本評論社，初版 1989, 新版 2004.
7) ラウグヴィッツ（山本敦之訳），『リーマン—人と業績』，丸善出版，1998.
8) ワイル（田村二郎訳），『リーマン面』，岩波書店，1974.

（ふじかわ・えーげ，千葉大学大学院理学研究科）

葉山シンポジウムの思い出

多変数複素解析の国際研究集会をめぐって

野口　潤次郎



1. いきさつ

“葉山シンポジウム”と題するかどうかは別として，ホテルルーム付きの国際会議場である湘南国際村センターを会場として多変数複素解析の研究集会が初めて開かれたのは1995年（平成7年）3月のことである．この年に起きたこととして脳裏に浮かぶのは，一般的には「阪神・淡路大地震，1月17日（火）」と「地下鉄サリン事件，3月20日（月）」であろう．阪神・淡路大地震では避難所で右往左往する村山総理の映像が脳裏に残り，先般の福島原発事故で炉心溶融のさなか無意味なヘリコプター散水などを命令していた菅直人総理の姿と重なる．命令に従う自衛隊員のほうは命がけであるから堪らない．実に堪らない総理であった．

この年度は，ちょうど「湘南国際村センター」が開所したときで，前年10月頃に開所式が行われたばかりであった．この施設は，第3セクター方式とよばれる県と民間による半官半民の施設として新しく開発された湘南国際村の中に設立された．開所年度の利用と言うことで財政的な援助も含めてサービスが篤いということでここを会場として第3回MSJ-IRI (Mathematical Society of Japan-International Research Institute) Geometric Complex Analysis と題して国際会議を開くこととなった．日本数学会からも財政援助を得た．その頃の文部省の一般科学研究費は海外渡航・招聘に使うことが許されていなかったので，国際的な研究集会を開こうとするとまずは財政的なことが大きな壁としてあった．科学研究費の中に，もちろん国際研究集会向けの申請枠があったが，数が限られている上に，本当に予算が認められるかどうかが判明するのは，その開催年度になってからという不便さがあった．それから準備を始める，というのではとても間に合わない．そういうわけで他にも民間の財政援助を申請し助けてもらった．大きいのでは，「万博基金」で大きな援助をいただき大変助かった．おかげでこの研究集会は，1995年3月19日～29日の11日間に渡り参加者数145名（内海外参加者43名，ヨーロッパ各国，北米，中国，韓国）を得て成功裏に終わった．

このような動きは日本数学会の中でも新しいもので，MSJ-IRIシリーズは落合卓四郎氏（現東大名誉教授）が中心となって発足した学術委員会の提案する企画として始まってまもないものであった．我々の多変数複素解析のグループでも以前，「京都多変数国際会議（International Conference on Several Complex Variables, Kyoto），中野茂男組織委員長（当時京都大学数理解析研究所教授），1988年（昭和63年）3月22日～3月26日」を開催して以来，大きな国際研究集会は開かれていなかったのでそろそろ何かやりたいという機運があった．

2. 数学と研究集会

数学は，紙と鉛筆があればできる（お金は不要）という話があるが，それに加えて「研究集会」を加える必要があると思う．これには毎週開かれるセミナーから日本数学会が開く学会，そして大きな国際会議までレベルは多様であるが，少なくと

も研究課題を共有するレベルの研究集会は研究者の生活の一部である．1988年の京都多変数国際会議では，挨拶でドイツのK. Diederich教授が，実験科学者には実験道具が必須であるが数学者には研究集会が必要なのである，と述べていて，なるほどと思った．ついでに言えば，文献も収集保存とお金のかかることである．実験科学に比較すればわずかかもしれないが，やはり公的・安定的な財政手当がないと立ち行かない．

多変数複素解析あるいは多変数関数論では，日本は天才数学者岡潔の仕事で伝統がある．岡潔先生の最後の公表論文がOka X, 1962年で，その頃よりこの分野の国内研究集会が始まったようである．記録によると夏に開かれていた「多変数関数論サマーセミナー」の第1回が金沢大学で“(位相幾何学・微分幾何学・解析的多様体総合シンポジウム）1962年（昭和37年）9月5日～9月7日，世話人・酒井栄一（金沢大学），於金沢大学，参加者数23名”，とある．多変数サマーセミナーは原則手弁当参加で，合宿形式で催されるのが伝統であった．院生には，本田財団から鉄道運賃の補助が出ることがあった．

冬に開かれる多変数関数論研究集会，これも長い．いつが初めか分からないが，筆者が院生のときには，すでに定例になっていた（市内個別宿泊型)．これは，概ね科学研究費の旅費援助があった．

1996年（平成7年）度より文部省の科研費による海外渡航・招聘が可能になった．これは数学者にとって本当に嬉しい事件であった．その頃，学術委員会の委員長をしていた川久保勝夫氏（当時阪大教授）は，我々の想いが天に通じたかと喜んでいた．これにより，初めて科研費で海外より4名招聘して葉山で多変数関数論研究集会（冬）が開催された．

3. 名前と開催時期について

1997年(平成9年) 12月より「Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables (or Several Complex Variables)」として国際的に海外招聘者(7～10名)を入れて開催，概ね3泊4日であった．この頃，国内の参加者の間で名前付けについて議論があった．タイトルに“国際”（“International”）を入れた会議がある．だいぶ前，S.S. Chern教授がアジアには国際的に通用する数学の専門誌がないということで，“International Journal of Mathematics” を立ち上げた．この話をドイツの複素解析の権威H. Grauert教授にしたところジャーナルの名前はと聞かれ “International ...” と言ったところ “ハーハーハー，インターナショナル” と言われた．そう言われ，なるほど文化とはそういうものなのか，と思った．実際，“国際文化” などという “文化” はない．その地に根を下ろして育ったものでないと世界は認めない．そのようなことがあり，“国際”（“Intenational”）を付けないことを提案し，納得していただいたのも思い出である．

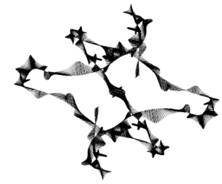
2007年（平成19年）に冬の葉山シンポジウムを夏に移動，多変数サマーセミナーを冬に移動して開催するようになった．

これは，海外参加者が7月は既に休みに入っていること，日本側招聘者が会議の後に滞在を延長して自分のホーム大学へ呼んで研究交流・共同研究をしやすくするためである．しかし，冬の葉山から相模灘を通してみる富士山の美しさには，代え難いものがあり，夏はそれが見られないのは残念である．数学も心の中に美しい風景を作るものなので共鳴（coherence）するのかもしれない．今でも，冬のほうが良いのかなと思うことがある．これは，冬の葉山を知っている海外参加者からもそのような声を聞いたことがある．

研究集会は，話す人も大事だが聞き手も大事である．あるいは聞き手のほうが，研究集会の本質を成しているのかもしれない．日本または世界のどこかで誰かが複素解析関係で良い仕事ができたときに，“葉山で話したい” と思われるような会合になればと願っている．

（のぐち・じゅんじろう，東京大学・東京工業大学名誉教授）

ブラウン運動と複素解析



厚地　淳

1. ブラウン運動

お互いの分野をよく知らない研究者と会ったとき，研究分野を尋ねられることが良くある．私の場合，確率論を用いて関数論・複素関数論の問題を考えている，というと，最近はそうでもなくなってきたが，以前は必ず怪訝な顔をされたものである．本稿では実際はそれほど怪しいものではなく，確率論（特にブラウン運動）と複素関数論は実に相性の良いものだということをお伝えしたい．ブラウン運動という言葉はよく耳にすると思うが，数学的定義は次のように与えられる．**標準ブラウン運動**とは，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で，次のような条件を満たす確率過程（時間に伴って変化する確率変数）を指す．ここで，$B_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ はこの確率空間上の実数値確率変数である．

i) $P(\{\omega \mid B_0(\omega) = 0\}) = 1.$
ii) $P(\{\omega | t \mapsto B_t(\omega)$ は連続 $\}) = 1.$
iii) 任意の $s, t > 0$ に対し，$B_{t+s} - B_s$ は $\sigma(B_u; u \leq s)$ と独立で，B_t と同じ分布を持つ．さらに，この分布は，平均 0，分散 t の正規分布である．すなわち，A を $\mathbb{R}$ のボレル集合とすると

$$P(\{\omega | B_{t+s}(\omega) - B_s(\omega) \in A\} | \sigma(B_u; u \leq s)) = P(\{\omega | B_t(\omega) \in A\}) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

$\sigma(B_u; u \leq s)$ は B_u $(0 \leq u \leq s)$ を可測にする最小の σ-加法族である．左右に等確率で整数点上を動く原点から出発する単純ランダムウォークを線形補間した確率過程を考え，適当なスケーリング（時間を n 倍，空間を $1/\sqrt{n}$ 倍）の下，$n \to \infty$ とするとこの標準ブラウン運動に収束することが知られている．ランダムウォークはもっとも素朴で自然な確率過程であると思われるが，このようなことからもブラウン運動が自然な数学的対象であることがわかるだろう．また，これからも想像できると思うが，正規分布が出てくるのは中心極限定理と深く結びついているからである．ブラウン運動の構成にはいくつか知られていて，例えば，ランダムなフーリエ級数を考える方法などがある．

B_t に対し $B_t + x$ $(x \in \mathbb{R})$ を考えると，x から出発する連続な確率過程を考えることができる．条件 ii) よりこのような確率過程があると，$\omega \mapsto B.(\omega)$ により $\mathbb{R}$ 上の連続な軌跡の空間 $C([0,\infty) \to \mathbb{R})$ への可測写像が得られ，この空間上に確率測度が誘導される．これを P_x と書くことにしよう．これも空間は変わったがブラウン運動を与える．ただし，i) は $P_x(B_0 = x) = 1$ を満たしている（ω は省略した．以降も同様に書く）．これを x から出発するブラウン運動と呼ぶ．ブラウン運動の軌跡をしばしば『道』と呼ぶ．我々は $\mathbb{R}$ 上の道の空間に測度を導入したことになる．ブラウン運動は，マルコフ性，強マルコフ性といった性質を持つ．連続な道を持つ強マルコフ確率過程を拡散過程と呼ぶ．ブラウン運動は拡散過程の一種である．

2. 複素ブラウン運動

さて，X_t と Y_t を独立なブラウン運動で，それぞれ x, y から出発するものとしよう．このとき，(X_t, Y_t) は (x, y) から出発する $\mathbb{R}^2$ 上のブラウン運動であるという．$Z_t = X_t + iY_t$ $(i = \sqrt{-1})$ とおくと，$\mathbb{C}$ 上の確率過程が得られる．これを $z = x + iy$ から出発する $\mathbb{C}$ 上のブラウン運動，あるいは，**複素ブラウン運動**と呼ぶ．前と同様に $\mathbb{C}$ 上の道の空間に測度を導入したことになる．$\mathbb{C}$（あるいは $\mathbb{R}^2$）上のブラウン運動には特徴的な性質が一つある．それは**再帰性**と呼ばれるものである．すなわち，任意の $z \in \mathbb{C}$，任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対し，

$$P_z(Z_t \text{ は } U \text{ を無限回訪問する}) = 1.$$

ユークリッド空間上のブラウン運動の場合，再帰性は次元による．実1次元のときは，再帰性を持ち，任意の点を無限回訪問することになる．すなわち，

$$\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty, \quad \limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty \qquad (1)$$

が確率1で成り立つ．独立な実1次元ブラウン運動を n 個並べることで，$\mathbb{R}^n$ 上のブラウン運動が得られるが，$n \geq 3$ のときは，非再帰的になる．実はこの性質は関数論的な意味を持ち，有界な非定数劣調和関数の存在と関わっている．

f を $\mathbb{C}$ 上の非定数正則関数とする．

$$\rho_t = \int_0^t |f'(Z_s)|^2 ds$$

とおくと，ρ_t は t に関して狭義増加，また再帰性より，$\rho_t \uparrow \infty$ $(t \uparrow \infty)$ が確率1で成り立つ．

定理1（Lévy）　$f(Z_{\rho_t^{-1}})$ は複素ブラウン運動である．すなわち，ある複素ブラウン運動 $\tilde{Z}_t$ が存在して，

$$f(Z_t) = \tilde{Z}_{\rho_t}. \qquad (2)$$

これは**ブラウン運動の等角不変性**と呼ばれる性質である．言い換えると，$f(Z_t)$ は新しい時計 ρ_t に従って動く複素ブラウン運動であるといえる（このようなことを**時間変更**という）．また，(2) より，$f(Z_t)$ の実部と虚部も実数値ブラウン運動の時間変更で書けることも分かる．実は，一般に調和関数とブラウン運動の合成はマルチンゲールという確率過程になり実1次元ブラウン運動の時間変更で書けることが知られている．

ブラウン運動の等角不変性を見ると，正則関数の研究にブラウン運動が使えるのではないかと思えてくる．また，ブラウン運動はいったいどれくらい関数のことを感じ取っているのだろうか．

3. ピカールの小定理

ブラウン運動の道に沿って関数の性質を見ることによる研究は，P. Lévy 以降，いくつか知られている．例えば，J.L. Doob は正則関数だけでなく調和関数についても境界挙動などの研究を行った[4)]．ここでは，B. Davis による正則関数のピカールの小定理のブラウン運動を使った証明[3)]を紹介しよう．これを述べる前に等角不変性 (2) を使うと次がすぐにわかる．

命題1　f を $\mathbb{C}$ 上の非定数正則関数とする．このとき，f は対数容量正の集合を除外しない．

対数容量正の集合の例としては，空でない開集合や線分がある．可算個の点からなる集合は対数容量零である．例えば，正則関数の零点の集合は対数容量零である．線分はルベーグ測度 0 だが対数容量正の集合の例である．対数容量正の集合は複素ブラウン運動が有限時間で到達する確率が正であることが知られている．対数容量零の集合は，ほとんどすべての道が到達し得ない．ブラウン運動から見ると小さくて通り過ぎてしまうような集合ということである．

命題1の証明：f が対数容量正の集合 A を除外するとする．f と Z_t に対し，式 (2) の $\tilde{Z}_t$ を考える．$\tilde{Z}_t$ が A に到達する最小時間を σ_A とすると，$P(\sigma_A < \infty) > 0$ である．一方，f は A を除外するから式 (2) より，$\rho_t \leq \sigma_A$ $(\forall t)$ であり，

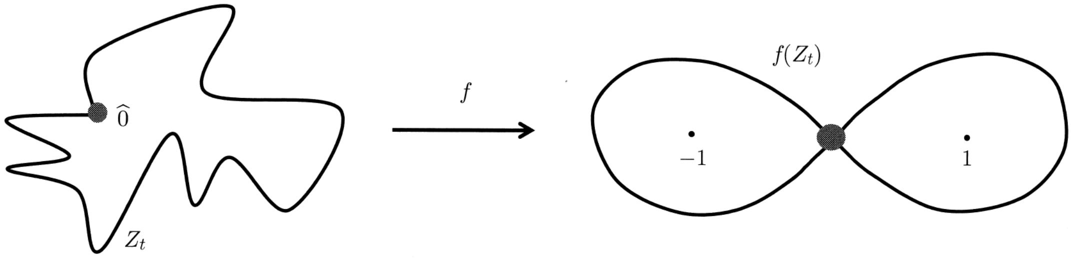


図 1　Davis のアイディア．

$P(\rho_\infty = \infty) = 1$ に矛盾する．

ピカールの小定理からすると命題 1 は非常に弱い主張といえるが，f の定義域が $\mathbb{C}$ であることは本質的ではない．時間変更 (2) と $\rho_\infty = \infty$ があればよいことになる．例えば，f の定義域が O_{HB}（有界な非定数調和関数を持たないリーマン面の族）に属する場合でもただちに拡張できる．ちなみに，ブラウン運動が再帰的になるリーマン面のクラスは O_G と呼ばれ，$O_G \subsetneqq O_{HB}$ である．

ピカールの小定理を思い出そう．

定理 2（Picard）　$\mathbb{C}$ 上の非定数正則関数は，高々 1 点を除外する．

Davis の基本的なアイディアは次のようなものである[2,3]．$f(0) = 0$ とする．f が 2 点 $-1, 1$ を除外したとしよう（図 1）．原点の小さな近傍 δ を同一視した物を $\hat{0}$，この複素平面を $\hat{\mathbb{C}}$，$f(\delta)$ を同一視した複素平面を $\tilde{\mathbb{C}}$ とする．f は，$\hat{\mathbb{C}}$ から $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 1\}$ への連続写像と見ることができる．再帰性により，$\hat{0}$ を出発した Z_t は時間がたつと何回でも $\hat{0}$ に帰ってくる．一般に複素ブラウン運動は，任意の異なる 2 点に巻き付くだろう．すると，等角不変性 (2) より，$f(\hat{0})$ から出発した $\tilde{Z}_t$ の道は，そのうちに，2 点 $-1, 1$ に巻き付いて再び $f(\hat{0})$ に戻ってくるだろう．すると，そのブラウン運動の道は，図 1 の右側のような閉曲線とホモトピックな曲線となるだろう．このような $\hat{\mathbb{C}}$ 上の Z_t の道から作られる閉曲線は 1 点に可縮であるが，連続写像によるその像は可縮ではないということになる．この 2 点への巻き付きを $\mathbb{C}$ 上の Z_t の様子を調べることで証明するのは手間がかかり，普遍被覆面に上げて見たほうがやさしいということは事実だ[6,9]．このためオリジナルの証明よりも易しくなることもなく，このような証明にあまり価値を認めない専門家もいる．しかし，この証明は，アイディアから定理のエッセンスを瞬時に理解することができる，きわめて直観的なものだ．そして，複素平面と 2 点を除いた複素平面の幾何学的性質を再帰性と巻き付きの性質，関数の正則性を等角不変性と純粋な複素ブラウン運動の性質で読み替えてそれを用いて証明するというのも好ましい．これはブラウン運動の幾何学的性質と関数論的対象との関係の研究などに対する我々の好奇心を刺激せずにおられない．そもそも，巻き付きの性質は複素ブラウン運動の固有の性質であり，ピカールの小定理から切り離して，これ自体研究する価値のあるものだ．この巻き付きについては，定性的性質はすでに Ito–McKean の本[6]に述べられていたが，さらに巻き付きに関連するブラウン運動の汎関数の性質を熱心に調べたのが，M. Yor[10]とその共同研究者たちである．

4. 線積分と確率積分

複素解析では種々の量が線積分によって表現される．例えば，閉曲線の 1 点の周りの巻き付きの様子は回転数で調べられる．これは位相的性質を定量的に表現するものであることは承知のとおりである．回転数は $dz/(z-a)$ という 1-形式を閉曲線に沿って線積分することで得られるが，ブラウン運動の回転数をこのような形で得られないだろうか．ブラウン運動の道は，ほとんどすべての

道に対していたるところ微分不可能であり，いかなる区間においても有界変動ではない．したがって，スティルチェス積分でこれを定義することはできない．これに代わるのが確率積分である．今，$\alpha = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ を $\mathbb{C}$ 上の C^1 級 1-形式とする．このとき，ブラウン運動の時刻 0 から t までの道 $Z([0,t])$ に沿った積分を

$$\int_{Z([0,t])} \alpha = \int_0^t f(Z_s)dZ_s + \int_0^t g(Z_s)d\bar{Z}_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_s) + \frac{\partial g}{\partial z}(Z_s)\right) ds \tag{3}$$

で定義する．ここで，

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

特に，α が正則 1-形式のとき，すなわち，f は正則で $g=0$ のときは，

$$\int_{Z([0,t])} \alpha = \int_0^t f(Z_s)dZ_s \tag{4}$$

となる．ここに現れた dZ_s，$d\bar{Z}_s$ による積分が確率積分であり，詳しくは，伊藤積分とも呼ばれる．確率積分についてここでは詳しくは述べないが，次は直感的理解に役立つかもしれない．

$$\int_0^t f(Z_s)dZ_s = \text{P-}\lim_{|\varDelta|\to 0} \sum_{t_j} f(Z_{t_j})(Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j}).$$

ここで，$\varDelta : 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ は，$[0,t]$ の分割である．すなわち，ある種のリーマン和が確率積分に確率収束することを意味している．ここで，分点の関係に注意してもらいたい．被積分関数の分点は区間の左端の点である．この和のとり方を変えると一般には違った積分に収束する．その極限として現れる積分の一つに Stratonovich 積分と呼ばれるものがあるが，上の確率論的線積分の定義 (3) はこの積分に直接的に対応する[5]．確率積分が出てきたところで，ブラウン運動を使った解析での有用な道具を紹介しよう．

定理 3（伊藤の公式） f を $\mathbb{C}$ 上の C^2 級関数とする．このとき，

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z} dZ_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{Z}_s + 2\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} ds. \tag{5}$$

前の確率論的線積分の定義 (3) の妥当性はこの公式からもわかる．$\gamma(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を $\mathbb{C}$ 上の連続曲線とする．γ の近傍で $\alpha = dh$ を満たす関数 h があったとすると，

$$\int_\gamma \alpha = h(\gamma(t)) - h(\gamma(0))$$

となる．よって，

$$\int_{Z[0,t]} \alpha = h(Z_t) - h(Z_0)$$

となるべきだが，伊藤の公式 (5) によりこれは (3) の右辺に一致する．

5. ブラウン運動の巻き付きと確率論的留数定理

さて，点 $a \in \mathbb{C}$ の周りのブラウン運動の道の回転を考えよう．簡単のため，$a=0$ とする．$Z_0 \neq 0$ ならば，確率 1 で Z_t は 0 に到達しないため，$\log Z_t$ は意味を持つ．これに伊藤の公式を適用すると，

$$\log Z_t - \log Z_0 = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}.$$

一方，$\log Z_t = \log|Z_t| + i\arg(Z_t)$ だったから，

$$\arg(Z_t) = \mathrm{Im}\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} + \arg(Z_0).$$

今，Z_t の 0 の周りの角関数 θ_t を

$$\theta_t = \mathrm{Im}\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{|Z_s|^2}$$

とおく．これは $\theta_0 = 0$ を満たし，一意的に定まる．この確率積分は（局所）マルチンゲールになる．前述したように，ある標準ブラウン運動 B_t が存在して，

$$\theta_t = B_{\eta_t}, \quad ただし，\eta_t = \int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}$$

とかけることが知られている．Z_t の再帰性より，確率 1 で $\eta_\infty = \infty$ となるから，式 (1) より確率 1 で

$$\liminf_{t\to\infty} \theta_t = -\infty, \quad \limsup_{t\to\infty} \theta_t = +\infty$$

となる．すなわち，ブラウン運動は 0 の周りを何回でも巻き付き，またいくらでも解けるということになる．これは原点に限らず，どの点の周りでも同じである．さらにもっと詳しい様子もわかる．

定理 4（Spitzer） $2\theta_t/\log t$ の分布は，$t\to\infty$ のとき，コーシー分布に収束する．

このように確率論では，時間無限大での極限に特徴的なものが現れるということがしばしばあり，興味が持たれる．大数の法則や中心極限定理は言わずもがなだろう．回転数は，$dz/(z-a)$ という 1-形式の積分であったが，より一般の形，$f(z)dz$ の積分については何か言えるだろうか．コーシーの積分定理や留数定理のようなものはブラウン運動を通じて見えてこないのだろうか．これも時間を止めていたのではわからないが，時間を発展させると見えてくるものがある．

定理 5（Pitman–Yor） f を $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_p\}$ で正則な関数，G を $\{z_1,\dots,z_p\}$ を含む有界な開集合とする．このとき，

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t f(Z_s)1_G(Z_s)dZ_s \xrightarrow{(d)} \sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}(f,z_j)\left\{\frac{\Lambda}{2}+iW_j^-\right\}. \qquad (6)$$

ただし，$\mathrm{Res}(f,z_j)$ は f の z_j における留数，$\xrightarrow{(d)}$ は法則収束を意味する．

Λ という確率変数は，指数分布を持つ確率変数で，W_j^- は，$\frac{2}{\log t}\mathrm{Im}\int_0^t 1_{\{|Z_s-z_j|<1\}}\frac{dZ_s}{Z_s-z_j}$ の $t\to\infty$ のときの極限として現れる z_j の周りの小さい巻き付きに由来する確率変数である．集合 $\{z_1,\dots,z_p\}$ は対数容量零であるので Z_t からは一義的には見えないはずであったが，長時間立てば，ブラウン運動は関数の留数を感じ取ることができるのである．

6. ピカールの小定理の拡張

Davis の確率論的証明は複素ブラウン運動の詳しい性質と複素関数論的対象の関わり合いに関する研究を示唆したが，関数論そのものに対する確率論的方法による研究を進める端緒にもなった．W.S. Kendall は調和写像のピカール型定理，リュービル型定理をブラウン運動を用いて考察した[8]．調和関数とブラウン運動の合成が実数値マルチンゲールになるように，リーマン多様体上で定義されたブラウン運動と調和写像との合成は，写像の値域の多様体上のマルチンゲールという確率過程になる．これを利用する．Davis の証明では複素ブラウン運動の再帰性が重要な意味を持ったが，Kendall の証明ではブラウン運動の coupling property が用いられた．これは有限時間で出会うような，異なる 2 点から出発する独立とは限らない 2 つのブラウン運動が存在することをいう．この性質はブラウン運動が存在する空間の幾何学的構造を反映している．例えば，リッチ曲率が非負であるような完備リーマン多様体上ではこのようなものが存在する．

複素解析の世界ではピカールの定理は幾何学的関数論，正則写像の値分布論という分野の始まりであると考えられている．次節ではブラウン運動とこの分野の中心的分野であるネヴァンリンナ理論の関係を垣間見てみよう．

7. ネヴァンリンナ理論とブラウン運動

ピカールの定理は正則関数（有理型関数）の値の様子を定性的に見たものであったが，ネヴァンリンナ理論はより定量的な評価を与える．古典的なネヴァンリンナ理論では次の 3 つの量が重要な役割を果たす．$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を有理型関数とする．これはリーマン球面（1 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とも見ることができる）への正則写像と見ることができる．$f(0)\neq a,\ \infty$ とする．

$$m(a,r)=\int_0^{2\pi}\log[f(re^{i\theta}),a]^{-1}\frac{d\theta}{2\pi},$$

$$N(a,r) = \sum_{f(\zeta)=a, |\zeta|<r} \log \frac{r}{|\zeta|},$$

$$T(r) = \int_{|z|<r} \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} \log \frac{r}{|z|} dxdy.$$

と定義する．ただし，$[w,a]$ はリーマン球面上の弦距離である．

$$[w,a] = \begin{cases} \dfrac{|w-a|}{\sqrt{|w|^2+1}\sqrt{|a|^2+1}} & (a \neq \infty \text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{\sqrt{|w|^2+1}} & (a = \infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

$T(r)$ は Ahlfors–Shimizu の特性関数と呼ばれ，像の増大を表す量である．これらの量は，すべてブラウン運動の言葉を使って記述できる．まず，τ_r を 0 から出発するブラウン運動が $|z|=r$ に到達する最小時間とする．すると，対称性から Z_{τ_r} の分布は $|z|=r$ 上の一様分布となるので，

$$m(a,r) = E_0[\log[f(Z_{\tau_r}), a]^{-1}]$$

となる．ここで，E_0 は P_0 に関する期待値，すなわち，測度 P_0 による積分である．$U_t = \log[f(Z_t), a]^{-1}$, $U_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} U_s$ とすると，

$$N(a,r) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda P_0(U_{\tau_r}^* > \lambda)$$

もわかる．弦距離は，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上のケーラー計量 $\frac{1}{(1+|z|^2)^2} dz d\bar{z}$（Fubini–Study 計量）に関する距離であることを注意しておく．等角不変性のときと同じように，この計量に対応するブラウン運動 W_t が存在して，

$$f(Z_t) = W_{c_t}, \quad c_t = \int_0^t \frac{|f'(Z_s)|^2}{(1+|f(Z_s)|^2)^2} ds$$

が成り立つ．さらに，$T(r) = E_0[c_{\tau_r}]$ である．つまり，$T(r)$ は W_t の世界で見た新しい時計の期待値である．もし，f がプロパー（i.e. コンパクト集合の逆像がコンパクトになる）であれば，c_{τ_r} は $f(\{|z|<r\})$ からの最小脱出時間になるので，像がどれくらい広がるかを W_t の目で測った量ということになろう．

ネヴァンリンナ理論は，大雑把にいって第 1 主定理，第 2 主定理の 2 つの定理からなる．第 1 主定理は上の 3 つの関数の関係を述べたものだ．

定理 6（第 1 主定理）

$$m(a,r) + N(a,r) = T(r) + O(1).$$

また，次の第 2 主定理より，関数の値分布についていろいろなことがわかる．

定理 7（第 2 主定理）　$a_1, a_2, \ldots, a_q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を相異なる点とすると，r について長さ有限の集合を除いて，

$$\sum_{k=1}^q m(a_i, r) + N_1(r) \leq 2T(r) + o(T(r))$$

が成り立つ．

ここで，$N_1(r)$ は f' の零点の個数を数える関数で，非負の量である．f が非定数ならば，$T(r) \nearrow \infty$ ($r \nearrow \infty$) であり，剰余項は $o(T(r))$ であるので，これら 2 つの定理からピカールの小定理が従うことはよく知られている．ここに現れる量がすべて確率論的に表現されるということは，これらの定理も確率論的に導き出せることを示唆する．例えば，第 1 主定理はふつう，グリーンの公式とイェンセンの公式を合わせて使うことにより導くことができるが，代わりに，伊藤の公式とイェンセンの公式の確率論的な対応物：

命題 2　f を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする．$V_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |\log|f(Z_s)||$ とする．このとき，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P_0(V_{\tau_r}^* > \lambda) = \sum_{f(\zeta)=0, |\zeta|<r} \log \frac{r}{|\zeta|}.$$

から示すことができる．実は，グリーンの公式は，伊藤の公式によっても示すことができる．すでに知られていることを別の言葉で表現することに意味を感じない人もいるかもしれない．しかし，我々の確率論的表現には一定の意味があると考えている．それは，確率論的エッセンスを吟味することにより，本質が見えてきて拡張が容易になるということだ．むしろ，確率論的な表現のほうがより一般の表現を与えているともいえる．複素ブラウ

ン運動の代わりにケーラー多様体上のブラウン運動やより広いクラスの正則拡散過程[7]を考えても，伊藤の公式などの基本的な道具は成立するので，上のようなことは成り立つ．すると，ケーラー多様体などのより広いクラスの空間の上の有理型関数を対象とすることができる．例えば，簡単なことだが，どのような完備ケーラー多様体でも，その上の有理型関数が十分大きな増大度を持てば（十分大きな特性関数を持てば），高々 2 点しか除外できない，といったことも確率的表現を用いて第 2 主定理を拡張することでわかる．正則拡散過程とは，正則関数との合成が複素ブラウン運動の時間変更になるという等角不変性と似た性質を持つ拡散過程である．ケーラー計量に対応して定義されるケーラー多様体上のブラウン運動は正則拡散過程の一種であり，この性質を満たすことを注意しておく．なお，文献 7) には本稿で述べられなかった，正則拡散過程の多変数関数論への種々の応用，例えば多重劣調和関数との関係や，複素モンジュ・アンペール方程式への応用が触れられている．

最後に文献について少し注意しておこう．確率積分や伊藤の公式などブラウン運動を基にした微積分学は，stochastic calculus とか Ito calculus と呼ばれる．これについては，2, 5, 10) などを参照してほしい．2) は関数論などへの応用に力点が置かれた本で，本稿で述べた Davis によるピカールの小定理の証明などにも触れられており，あまり他に類を見ない（以前は R. Durrett による同様な志向の本があったが，現在では手に入り難い）．ただし，訂正を必要とする箇所もあり注意を要する．著者のホームページにはこの本の正誤表が挙げられている．読者は著者のページを検索して正誤表を手に入れるほうがよいだろう．ピカールの小定理の証明は，Davis のアイディアをベースにする独自のものだが，これを見るとやはりかなり手間がかかることがわかる．多様体上のブラウン運動や確率微分方程式については，5) が詳しい．10) はブラウン運動の詳しい性質に注目して関連する話題を軸に展開する stochastic calculus の教科書である．練習問題には最近までの結果が取り入れられており，これを読むとブラウン運動を中心とする数学にはまだまだやるべきことがあることを再認識させられる．最終章には本稿で述べた巻き付きの問題に関連するブラウン運動の汎関数に関する極限定理が述べられている．定理 5 についてもそこで見つけられるだろう．ブラウン運動の汎関数と関数論的対象との関係を探ることはまだ未開拓な部分も多く，興味深いことであると思う．

参考文献

1) 厚地淳，ブラウン運動と調和写像・正則写像の値分布論．数学 **54(3)**, 235–248, 2002.
2) R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis.* Springer, New-York, 1995.
3) B. Davis, Brownian motion and analytic functions. *Ann. Probab.* **7** (1979), no.6, 913–932.
4) J.L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer; 1st ed., 1984. Reprint, 2001.
5) N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes. Second edition.* North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.
6) K. Ito, H.P. McKean Jr., *Diffusion processes and their sample paths*, 2nd ed. Springer, Berlin, 1974.
7) 金子宏，多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程．数学 **41(4)**, 345–357, 1989.
8) W.S. Kendall, Stochastic differential geometry, a coupling property, and harmonic maps. *J. London Math. Soc.* **(2) 33** (1986), no.3, 554–566.
9) T. Lyons, H.P. McKean Jr., Winding of the plane Brownian motion. *Adv. in Math.* **51** (1984), no.3, 212–225.
10) D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, Berlin, 1991, 3rd printing, 2005.

（あつじ・あつし，慶應義塾大学経済学部）

複素数とシュレディンガー方程式



中村　周

1. 複素数との闘い

大学に入って，数学や物理学に興味を持ち始めた頃，私は複素数が嫌いでした．自然界は実数によって記述される世界であり，「虚数」を含む複素数は，自然界を記述する上では「不自然」です．また，私と同様に数学の勉強を始めた友人が，「複素解析的な世界の美しさ」を賞賛するのを聞いては反発を覚えました．複素解析的な世界は，一点の近くの性質で全世界が決定される，「堅い」世界です．「自然界は，そんな堅くて自由のない世界であってたまるものか」と，工学や物理にも自分の将来を夢見ていた自分は考えたのです．

しかし，もちろん，数学，数理物理学においては，複素数，複素解析は避けては通れない，基本的な重要性があります．「複素数なんていらない」と虚勢を張ってもいられません．それでも，複素数，複素解析性については，いつも批判的な部分，疑問を保ちながら数理物理の研究をしてきました．その中で，少しずつ学んできた複素数の大切さについて，ここでは書いてみたいと思います．

2. シュレディンガー方程式の複素数の値を取る波動関数

私は，量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式の数学的構造，特に偏微分方程式としての解の性質，スペクトルなどについて研究してきました．シュレディンガー方程式は，どう考えても，奇妙な方程式です．シュレディンガー方程式は，次のような形の方程式です．

n 次元のユークリッド空間中を運動する粒子の運動を考えましょう．粒子の質量は $m>0$，電荷は $e\in\mathbb{R}$，ポテンシャル関数を $V(x)$ とする静電場中を運動しているとします．このとき，粒子を記述する関数を $\psi(t,x)$ $(t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n)$ として，**シュレディンガー方程式**（Schrödinger equation）は

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(t,x)+eV(x)\psi(t,x)$$

と書けます．ここで $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位，

$$\triangle=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

は $\mathbb{R}^n$ 上のラプラス作用素，$\hbar>0$ は量子力学に特有の定数，プランク定数です[*1]．

波動関数 $\psi(t,x)$ は，時刻 $t\in\mathbb{R}$，位置 $x\in\mathbb{R}^n$ における粒子の状態を記述している，ということになっています．また，いわゆる「コペンハーゲン解釈」によれば，$|\psi(t,x)|^2$ が，その時刻，位置における粒子の「存在確率」を表している，ということになっています．そうすると，$\psi(t,x)$ の複素数としての位相は，物理的には観測できないことになりますが，方程式自体には虚数の係数があ

*1）量子力学に関しては，多く教科書があるが，例えばファインマンの教科書[1]が有名．量子力学の数学的な解析については，例えば新井[2]，中村[3]辺りから見てみると良いと思う．

るので，波動関数は必然的に複素数値となります．つまり，シュレディンガー方程式は，物理的に観測されない（原理的にできない）複素位相を含む方程式である，ということになります．

いわゆる古典的な偏微分方程式，つまり熱方程式，ラプラス方程式，波動方程式と比べてみると，シュレディンガー方程式の奇妙さは際立っています．古典的な方程式においては，状態を記述する関数は実数値であり，それぞれ具体的で直接観測可能な意味を持っています．熱方程式であれば，温度，あるいは物質の密度，ラプラス方程式であれば電位，あるいは膜の高さ，波動方程式であれば波の高さ，あるいは電位として，直感的に意味が理解できる，実体的なものですが，シュレディンガー方程式の波動関数は，$\mathbb{R}^n$ 上の関数が粒子を記述するという奇妙さに加えて，複素数値であるという奇妙さが重なり，理解に苦しみます．

3. $U(1)$ ベクトルバンドルに値を持つ関数としての波動関数

シュレディンガー方程式，あるいは量子力学の「関数が粒子を記述するという奇妙さ」については，ここでは（紙面も足りませんし）書きませんが，複素数値である，ということについては，幾何学的な解釈が可能です．結局のところ，波動関数は複素数値ではあっても，複素変数の関数ではないので，複素解析的な構造は持ちません．複素平面 $\mathbb{C}$ を 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ と考えていけない理由はないのです．$\psi(t,x)$ は，$(\mathrm{Re}[\psi(t,x)], \mathrm{Im}[\psi(t,x)]) \in \mathbb{R}^2$ という，ベクトル値の関数と考えても，もちろん大丈夫です．

さて，複素平面には，1 次元ユニタリー群

$$U(1) = \{\mathrm{e}^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

が作用していると考えるのが自然です．波動関数は，$U(1)$ が作用する複素平面に値を持つ関数である，と解釈できます．微分幾何学的な言葉を用いれば，$U(1)$ の作用によって $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ が $U(1)$-ベクトルバンドルの構造をもち，波動関数は，このベクトルバンドルの「切断」であると解釈できます．

- 波動関数 $\psi(t,x) = \mathrm{e}^{i\theta(t,x)}|\psi(t,x)|$ の位相 $\theta(t,x)$ は，粒子の「内部自由度」．
- スピンを持つ粒子の波動関数

$$\vec{\psi}(t,x) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(t,x) \\ \psi_\downarrow(t,x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

のベクトルの方向も，粒子の「内部自由度」．

図 1　複素数の位相は，内部自由度．

一方，$U(1)$ は，2 次元直交群

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

と同型ですから，波動関数は $SO(2)$ が作用する 2 次元空間に値を持つ関数である，と考えても同じことです．同様に微分幾何学の言葉を用いれば，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ に $SO(2)$ が作用することによって $SO(2)$-ベクトル束としての構造を持っていて，波動関数はその切断である，と言うことができます．

この見方は，スピン自由度を持つシュレディンガー方程式を考えると，さらにその有用性が理解できます．スピンというのは，量子力学特有の粒子の**内部自由度**（internal degree of freedom）であり，粒子自身の回転と極めて似ていながら，古典力学的な解釈が不可能なものです．電子のような，スピン自由度 1/2 の粒子を記述する方程式（パウリ方程式）の波動関数は，複素 2 成分，つまり $\mathbb{C}^2$ に値を持つ $\mathbb{R}^3$ 上の関数となり，$\mathbb{C}^2$ には 2 次ユニタリー群 $SU(2)$ が作用します．複素数の自由度と合わせると，$U(1) \times SU(2) = U(2)$ が作用する空間に値を持つ関数が（スピンを持つ粒子の）波動関数です．これは，さらに一般化されてゲージ場の理論へとつながっていきます（図 1）．

さて，振り返って考えると，シュレディンガー方程式の波動関数が複素数値であることは，実は実ベクトル空間の「便利な」表現である，と考えても良いことが分かります．ただ，とても便利な表現ではあるけれど，複素解析学が必要なわけではありません．

4. 複素フーリエ変換と運動量

シュレディンガー方程式の解，波動関数が粒子を記述する，という考え方の奇妙な点の一つに，「速度」あるいは「運動量」が（最初には）分からない，ということが挙げられます．

古典力学のニュートン方程式は，一階連立微分方程式として

$$m\dot{x}(t) = p(t), \quad \dot{p}(t) = -e\nabla V(x(t))$$

と書けます．ここで，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は粒子の位置，$p(t) \in \mathbb{R}^n$ は粒子の運動量であり，粒子の状態は $(x(t), p(t))$ で記述されます．この状態の集合，$\mathbb{R}^{2n}$ は**相空間**（phase space）と呼ばれます．シュレディンガー方程式の相空間は，$\mathbb{R}^n$ 上の二乗可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ です．波動関数 $|\psi(t,x)|^2$ は粒子の位置の密度を記述しますが，速度は現れません．

量子力学の意味を理解するために，ポテンシャル関数がないとき，つまり $V(x) \equiv 0$ のときを考えましょう．これは，**自由なシュレディンガー方程式**（free Schrödinger equation）と呼ばれます．さて，量子力学の教科書を見ると，

$$\phi(p;x) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \exp\left(\frac{ix \cdot p}{\hbar}\right)$$

が一定の運動量 $p \in \mathbb{R}^n$ を持つ「物質波」である，と説明されています．これは，**複素平面波**（complex plane wave）です．時刻 $t = 0$ で $\psi(0,x) = \phi(p;x)$ であるようなシュレディンガー方程式の解は，

$$(2\pi\hbar)^{-n/2} \exp\left(\frac{i\left(x \cdot p - \frac{1}{2m}|p|^2 t\right)}{\hbar}\right)$$

となります（図 2）．$|\phi(p;x)| = (2\pi\hbar)^{-n/2}$ なので，この「波」の記述する粒子の存在確率は，全空間で定数ですが，複素数としての位相に，粒子の運動が記述されていることになります．もちろん，

$$\phi(p;x) = (2\pi\hbar)^{-n/2}\left\{\cos\left(\frac{x \cdot p}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{x \cdot p}{\hbar}\right)\right\}$$

と実数値の三角関数を用いて記述することもできますが，空間的に一様で位相だけが変わる，という波の性質をうまく表しているとは言えません．波動関数の運動量を表すには，複素フーリエ変換を用いるのが自然です．$\psi(x)$ が x について可積分な関数であると仮定するとき，

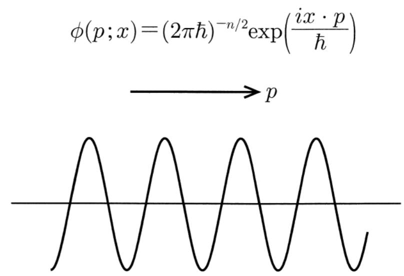


図 2　p 方向に向かう複素平面波．

$$\hat{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int \exp\left(-\frac{ix \cdot p}{\hbar}\right)\psi(x)dx$$
$$= \int \overline{\phi(p;x)}\psi(x)dx$$

を，$\psi(x)$ のフーリエ変換と定義します*2)．ここで，$p \in \mathbb{R}^n$ であり，$\hat{\psi}(p)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の関数となりますが，$\psi(x)$ がある粒子の（ある時刻での）波動関数であるならば，$|\hat{\psi}(p)|^2$ は運動量 p での粒子の存在密度を表している，と（物理的には）説明されます．フーリエの反転公式によれば，

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int \exp\left(\frac{ix \cdot p}{\hbar}\right)\hat{\psi}(p)dp$$
$$= \int \phi(p;x)\hat{\psi}(p)dp$$

が成立します．この最後の式は，波動関数 $\psi(x)$ は，重みを $\hat{\psi}(p)$ として，運動量 p の平面波を重ね合わせたものである，と解釈できます．量子力学の立場からすると，フーリエの反転公式とは，波動関数を運動量一定の複素平面波の重ね合わせとして表現する公式なのです．

ここでも，まだ複素変数，複素解析は登場しませんが，運動量が複素平面波として表現されることで，複素数から逃れられない，という印象が強くなってきました．

---

*2)　このフーリエ変換の定義には，プランク定数 $\hbar$ が入っているので普通のフーリエ変換の定義と少し異なって見えるが，本質的には変わらない．ここで定義されたフーリエ変換は，**半古典的フーリエ変換**（semiclassical Fourier transform）と呼ばれることがある．

5. トンネル効果と複素解析性

量子力学の解説書を見ると，**トンネル効果**（tunneling effext）が量子力学固有の，古典力学と大きく違う性質として紹介されることが多いようです．古典力学の粒子が乗り越えられないようなポテンシャルの壁を，量子力学の粒子は乗り越えられる，あるいは染み出してこられる，という奇妙な現象としてトンネル効果は紹介されます（例えば，ガモフの『トムキンスの冒険』[4]）．

偏微分方程式，特に楕円型偏微分方程式論の立場からすると，トンネル効果の「存在」は，「一意接続性定理」の一種と考えられます．つまり，ある開集合の上で恒等的に0であるような解は，全体で0である，という主張から，どんな障壁があっても，粒子は（少しは）染み出してくる，と言うことが期待されます．それは，「粒子が偏微分方程式で記述される」という奇妙さの必然的な帰結です．しかし，「どのくらい染み出してくるのか」は，決して明らかではありません．言い換えると，トンネル効果の大きさを評価する（見当をつける）ことは，数学的にも，実用的にも大切な課題です．

さて，1次元空間で，次のようなポテンシャル関数を考えてみましょう．

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \le 1), \\ a & (|x| > 1). \end{cases}$$

ここで，$a > 0$ はポテンシャル障壁の高さということになります（図3）．以下では簡単のため，$m = e = 1$ とします．古典力学の粒子の持つエネルギーは $\frac{1}{2}p^2 + V(x)$ ですから，もしも粒子のエネルギーが a より小さければ，粒子はポテンシャル障壁の中に入ることはできません．エネルギー E のポテンシャル障壁に閉じこめられた粒子は，固有方程式

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2}\triangle\psi(x) + V(x)\psi(x)$$

の，二乗可積分な解として与えられます．$\psi(x)$ は**固有関数**（eigenfunction），あるいは**束縛状態**（bound state）と呼ばれます．$E < a$ であれば，束縛状態はポテンシャル障壁の中に閉じこめられている，

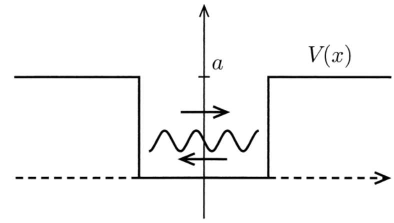


図3　ポテンシャル $V(x)$ に閉じこめられた波が束縛状態．

つまり，$|x| > 1$ の領域では $\psi(x) = 0$ であることが（古典力学の類推からは）期待されます．一方では，微分方程式の立場からは，もし $\psi(x)$ がある開集合で0であるならば，恒等的に0であることが（簡単に）証明できます．では，ポテンシャル障壁の中では，束縛状態 $\psi(x)$ の大きさはどのくらいなのでしょうか？

上の例においては，$|x| > 1$ での解は具体的に書き下せて，

$$\psi(x) = \mathrm{const} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{2(a-E)}|x|}{\hbar}\right)$$

となります．つまり，$|x| \to \infty$ のときには指数的に0に減衰します．さらに，プランク定数 $\hbar$ が0に収束するとき，$\hbar^{-1}$ についても指数的に0に減衰することが分かります．$\hbar$ は量子力学と古典力学の違いを表す定数と考えられ，$\hbar \to 0$ は半古典極限と呼ばれます．実際上は，$\hbar$ はとても小さな数なので，このポテンシャル障壁の中に束縛状態が染み出す量は極めて小さい，と考えてよいわけです．

このようなトンネル効果の大きさの評価には，次のような計算を用います．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\triangle + V(x)$$

を**ハミルトン作用素**（Hamilton operator），

$$P_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

を**運動量作用素**（momentum operator）と呼びます．$f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな実数値関数とするとき，

$$\mathrm{e}^{f(x)/\hbar}(H - E)\,\mathrm{e}^{-f(x)/\hbar} = \frac{1}{2}(P + i\nabla f(x))^2 + V(x) - E$$

と計算されます．この右辺が，ある意味で非負になるように $f(x)$ を選んで，一種の楕円型評価を用いて束縛状態の大きさの評価ができます．

上の計算は，以下のように解釈できます．古典力学のハミルトン関数（Hamilton function）を

$$h(x,p)=\frac{1}{2}|p|^2+V(x)\quad (x,p\in\mathbb{R}^n)$$

と書くことにすると，シュレディンガー方程式のハミルトン作用素は，ハミルトン関数に $p=P$ を代入して「量子化」したものと考えられます．量子化されたハミルトン作用素を，指数的な重み $\mathrm{e}^{f(x)/\hbar}$ によって変換したとき，それは，

$$h(x,p+i\nabla f(x))=\frac{1}{2}(p+i\nabla f(x))^2+V(x)$$

の量子化になっているのです．つまり，p 変数の部分に，複素数 $p+i\nabla f(x)$ を代入したものが出てきます．ここでは，ハミルトン関数の p に関する解析接続が本質的に用いられます．シュレディンガー方程式の場合は，ハミルトン関数の形が簡単なので当り前に見えますが，より一般のハミルトン関数の量子化から定義される方程式，あるいは「相空間でのトンネル効果」の評価をしようとすると，ハミルトン関数の複素解析性を仮定する必要があります．

この節では，トンネル効果という極めて物理的な現象の大きさの決定に，古典力学のハミルトン関数の複素解析性が関係する，というちょっと意外な事実を見出しました．次の節でも，もう少し，トンネル効果と複素解析性の関係について見ていきましょう*3)．

6. 運動量空間でのトンネル効果とポテンシャルの解析性

ベリー位相（Berry phase）で有名なイギリスの物理学者，Michael Berry は 1982 年の論文[8]で，

*3) 半古典極限の理論については，Dimassi-Sjöstrand[5]，Martinze[6]，Zworski[7] などの優れた教科書がある．特に，次節でも取り上げる相空間でのトンネル効果や偏微分方程式の解の解析性との関係については Martiez[6] が詳しい．

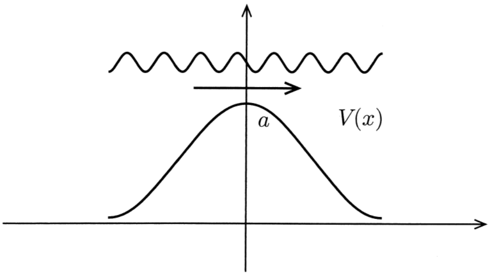


図 4　ポテンシャル障壁の上を通り過ぎる粒子の波.

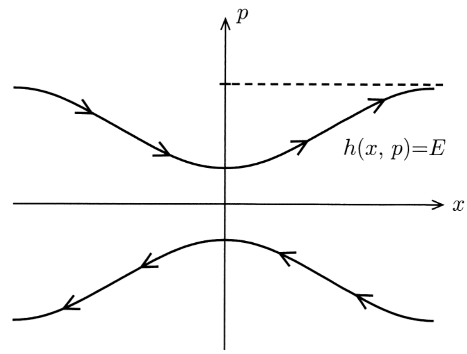


図 5　相空間の中での粒子の入れる領域, その運動.

1次元のシュレディンガー方程式の, ポテンシャル障壁の高さより大きなエネルギーでの散乱理論を考察しました (図 4). 散乱する粒子のエネルギーがポテンシャル障壁より高ければ, 古典力学的にはすべての粒子はポテンシャルで反射されないので, 散乱の「反射係数」は 0 になるはずです. 実際, ポテンシャルが滑らかな場合は, 反射係数はプランク定数の任意のべき乗より小さい, つまり, 任意の N について $O(\hbar^N)$ であることが, 半古典解析の標準的な理論を用いて証明できます. しかし, Berry はポテンシャル関数が解析的であれば, 反射係数は指数的に小さい, つまり $O(\mathrm{e}^{-\gamma/\hbar})$ $(\gamma > 0)$ であること, またポテンシャル関数が滑らかであっても解析的でなければ, 指数的には減衰しないことを示しました.

ポテンシャル関数に特異性, 例えば不連続性があれば, 波は特異性によって反射されます. それは, 水の波が岸の角によって反射されるのと同じような現象です. しかし, ポテンシャル関数が複素解析的かどうかで反射の大きさが変わる, というのは, 不思議な現象です. そして, それ以前に, 複素解析的ならば反射係数がトンネル効果と同じような指数的な減衰を示す理由は何でしょうか?

ポテンシャル関数の高さを $a = \sup V(x)$, 考えている散乱される粒子のエネルギーを $E > a$ としましょう. このとき, 古典力学の相空間の中での, ハミルトン関数 $h(x) = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ に従って運動する粒子の, 相空間の中で動ける領域は

$$\Sigma_E = \left\{(x,p) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; h(x,p) = E\right\}$$

で与えられます (図 5). ところが, いまの仮定の下では, Σ_E は, $p \geq \sqrt{2(E-a)}$ であるような連結成分と, $p \leq -\sqrt{2(E-a)}$ であるような連結成分に分割されます. 最初の連結成分が, 右の方向に運動する粒子であり, 後のほうの連結成分が, 左の方向に運動する粒子に対応しています. 古典力学において粒子の反射が全く起こらない, というのは, この 2 つの連結成分が交わらないからです. これは, トンネル効果の場合とよく似ています. つまり, 運動量の空間において (古典力学的な) 障壁があると, 量子力学の粒子はトンネル効果で障壁を乗り越えられるとしても, その大きさは指数的に小さい, つまり $O(\mathrm{e}^{-\gamma/\hbar})$ $(\gamma > 0)$ である, ということが期待できるわけです.

さて, 前節で説明したトンネル効果の大きさの評価では, 重み関数 $\mathrm{e}^{f(x)/\hbar}$ でハミルトン作用素を変換して, 変換された作用素の性質 (楕円性) から固有関数の指数減衰が証明できる, と説明しました. 同様のことが, 運動量の空間でも実行できます. つまり, 運動量作用素を用いた重み関数 $\mathrm{e}^{g(P)/\hbar}$ でハミルトン作用素を変換して, その性質を調べる, ということになります. 変換された作用素は, やや乱暴な書き方ですが,

$$h(x - i\nabla g(P), P) = \frac{1}{2}P^2 + V(x - i\nabla g(P))$$

のような形をした作用素になります. しかし, この右辺が意味を持つためには, ポテンシャル関数 $V(x)$ を複素領域に解析接続する必要があります. 実際, この議論は数学的にきちんとした形で正当化でき, $V(x)$ が複素解析的ならば反射係数が指

数的に減衰することが証明できるのです[9)].

ここで見た現象は，ポテンシャル関数の解析性が散乱反射係数の（半古典極限での）大きさを決定する，という不思議な現象でした．これは，ある関数の複素解析性は，フーリエ変換の指数減衰に対応している，という Paley–Wiener の定理と密接に関係しています[*4)]．量子力学においては，位置と運動量の関係がフーリエ変換で与えられるので，位置の空間での指数減衰には運動量の空間での解析性が反映され，運動量の空間での指数減衰には位置の空間での解析性が反映されるのです．逆に，偏微分方程式論における解の（複素）解析性（あるいは「超局所解析性」）の研究は，変換された関数の空間での指数減衰の指数減衰として特徴付けられ，それは実は，ある種の半古典極限の理論である，という方向で理論が整理できます．偏微分方程式の解の複素解析性と量子力学のトンネル効果の評価は，ほとんど表裏の関係にあるのです．

7. 量子力学における複素解析の役割

量子力学と複素数，複素解析との関係，と考えると，まずはシュレディンガー方程式の解である波動関数が複素数値である，ということが頭に浮かびます．実は，波動関数が複素数値であること自体は，粒子の内部自由度の一つの表現の方法なので，2次元ユークリッド空間と直交群を用いて書き下すこともできます．しかし，運動量一定の波としての複素平面波の意味，複素フーリエ変換による運動量の空間への波動関数の変換，等を考えていくと，複素数表示にはもっと深い意味があることが，だんだん見えてきます．特に，トンネル効果の指数的な評価には，ハミルトン関数の複素解析性が本質的に重要です．また，今回は紙数の関係で触れませんでしたが，**量子力学的共鳴**（quantum resonance）はレゾルベント作用素 $(H-z)^{-1}$ のリーマン面への解析接続の極として定義されます．一見したところ仮構的な数学的構築物に見えますが，実は原子，分子の崩壊現象を説明するのに欠かせない理論的な枠組みです．量子力学的共鳴の理論は，散乱逆問題にも関係する，とても盛んな研究分野です[*5)]．

このように，量子力学の理論，それ自体には複素解析性は本質的ではないように見えて，現象の精密な解析に入ってくると，様々な局面で複素解析性が大切な役割を果たします．私事になりますが，Phragmén–Linderöf の原理が量子力学の散乱理論の中で用いられるのを見たりすると，「もっと複素関数論を勉強しておけば良かった」と反省してしまいます．数理物理を志した初心とは異なり，量子力学系に隠された複素解析性を探る方向の研究論文も書くようになりました．（敗北宣言ではありませんが）どうやら，理論の深いところに潜るためのツールとして，複素解析的思考は不可欠なようです．

*4） 実際に Paley–Wiener の定理を使うわけではないが，定理の証明と同様の議論を用いる．

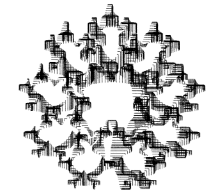
*5） 例えば，Melrose[10)] に紹介がある．

参考文献

1) リチャード・ファインマン（砂川重信訳）『ファインマン物理学〈5〉量子力学』岩波書店，1986.
2) 新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学』（共立講座 21 世紀の数学 (16)）共立出版，1997.
3) 中村周『量子力学のスペクトル理論』（共立講座 21 世紀の数学 (26)）共立出版，2012.
4) ジョージ・ガモフ（伏見康治訳）『トムキンスの冒険（G. ガモフコレクション）』白揚社，1991.
5) M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit* (London Mathematical Society Lecture Note Series), London Math. Soc. 1999.
6) A. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis* (Universitext), Springer 2002.
7) M. Zworski, *Semiclassical Analysis* (Graduate Studies in Mathematics), American Math. Soc. 2012.
8) M.V. Berry: Semiclassically weak reflections above analytic and non-analytic potential barriers, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** (1982) 3693–3704.
9) S. Nakamura, Tunneling effects in momentum space and scattering, *Lecture Notes in Pure Appl. Math.* **161** (Spectral and Scattering Theory, ed. M. Ikawa), Marcel Decker, New York, 1994.
10) リチャード・メルローズ（井川満訳）『幾何的散乱理論』共立出版，2003.

（なかむら・しゅう，東京大学大学院数理科学研究科）

整数論における複素解析的方法



松本 耕二

本稿ではゼータ関数，モジュラー形式など，整数論において重要ないくつかの複素関数についてお話します．ただし全面的な解説は到底不可能なので，ごく部分的，表面的な紹介になってしまうことをあらかじめお断りしておきます．

■ 1. Riemann ゼータ関数と素数の分布 ■

解析学の手法を援用して整数論の問題を解こうとする分野を，しばしば解析的整数論と総称します．かつて解析学が初めて整数論に応用された 18 世紀，19 世紀の頃には，離散的な量である整数の研究に連続量を扱う解析学が利用できたこと自体が驚くべきことと受け止められましたので，このような分野名が提唱されたのでしょう．しかしながら今日では，整数論の至るところに解析的手法は深く浸透していますので，解析的な手法を用いる，というだけで名付けられたこのような分野名は，いささか実状にそぐわなくなってきています．現在，解析的整数論と聞いて数学者が思い浮かべる内容には，かなりの個人差があるように見受けられます．

とは言え，**Riemann ゼータ関数**の理論が，解析的整数論の中核に位置する理論の一つだ，ということにはおそらくほとんどの数学者が異を唱えないでしょう．Riemann ゼータ関数というのは複素変数 s に対して

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad (1)$$

なる無限級数で定義される複素関数です．Riemann の名がついているのは，彼が 1859 年に発表した有名な論文において，$\zeta(s)$ を初めて複素関数として研究したことに由来するのですが，この関数を最初に考察したのは Euler で，Riemann より 100 年以上遡った 1730 年代のことです．Euler は s が実数の場合しか考えなかったので，級数 (1) は $s>1$ でしか収束しませんが，それでも Euler はその範囲で，$\zeta(s)$ の無限積表示

$$\zeta(s)=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} \qquad (2)$$

（ただし積はすべての素数 p をわたる）が成り立つ，という重大な発見をしました．この表示を $\zeta(s)$ の **Euler 積**表示と言います．

この (2) から，素数は無限にある，という有名な Euclid の定理の別証を与えることができます．この式で $s\to 1$ の極限を考えると，もし素数が有限個しかなければ右辺は有限の値に留まりますが，左辺は (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}=\infty$ となり，矛盾，というわけです．この証明の鍵は，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ が発散するという解析的な事実です．Euler のこの証明は，解析学が整数論に応用された史上初めてのケースであり，解析的整数論の出発点と言えるでしょう．そして，素数の分布を研究するのに $\zeta(s)$ が役立つかもしれない，という期待を抱かせる成果でもありました．

しかし，$\zeta(s)$ と素数分布論との真の繋がりが解明されるには，上述した Riemann の論文を待たねばなりませんでした．Riemann はこの論文で $\zeta(s)$ を複素関数として捉え，この関数が全複素平面 $\mathbf{C}$ に解析接続可能であること，$s=1$ での 1 位の極を除けば全平面で正則であること，$\zeta(1-s)$ の値を $\zeta(s)$ を使って書き表す「関数等式」が成り立つこと，そして，$0\leq \Re s\leq 1$ なる帯領域*1)（この領域を臨界領域と言います）内での $\zeta(s)$ の挙動，特にその零点の分布が，素数分布の情報を内包していることなど，正に時代を画した，いく

*1) $\Re s$ は s の実部を表す．

つもの目覚ましい結果を証明しました．正の数 x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ と書くとき，Riemann は，この $\pi(x)$ を $\zeta(s)$ の臨界領域内の零点の言葉で書き表す公式を得ています．そして Riemann は，臨界領域内の零点の実部はすべて 1/2 であろう，との推測を述べ，自分はこの推測を証明できていない，と論文中に明言しています．Riemann 以降も今日に至るまで，誰も証明に成功していないこの推測が，有名な **Riemann 予想**です．

整数列の中での素数の分布は一見はなはだ不規則で，従って素数の個数を表す関数 $\pi(x)$ の挙動を予測するのも困難に思えます．しかし実は，次の定理が成り立ちます．

定理 1（**素数定理**）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1. \tag{3}$$

ただし対数は自然対数です．すなわち関数 $\pi(x)$ の大きさは，漸近的には $x/\log x$ というごく単純な関数と一致しています．

この形の漸近公式に出版物上で初めて言及したのは Legendre で，18 世紀末のことです．未発表ながら Gauss も，同じ頃，同じ式を予想していたようです．彼は実際には，$x/\log x$ ではなく，対数積分と呼ばれる

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t}$$

が $\pi(x)$ を近似するであろう，と予測していました．$\mathrm{li}(x)$ と $x/\log x$ の比は $x\to\infty$ のとき 1 なので，Gauss の予測も (3) を意味します．

Riemann の研究は，$\zeta(s)$ を用いて素数定理を証明できるかもしれない，という可能性を強く示唆しました．そして実際に 1896 年，Hadamard と de la Vallée-Poussin は，それぞれ独立に，

定理 2　直線 $\Re s=1$ の上で $\zeta(s)$ は零点を持たない．

という定理を証明し，そしてそれを用いて定理 1 の証明に成功したのでした．

また，$\mathrm{li}(x)$ のほうが $x/\log x$ よりも，$\pi(x)$ との差が小さい，という意味で良い近似を与えることも判明しました．すると，$\pi(x)$ と $\mathrm{li}(x)$ の誤差はどれくらいだろうか，という点が気になりますが，この誤差評価の問題は臨界領域内での $\zeta(s)$ の零点分布の状況と直結します．Riemann 予想を仮定すれば，この誤差評価について，期待されるほぼ最善の評価が得られることがわかっています．Riemann 予想には現状では手が届かないわけですが，複素解析学の手法を駆使することによって，$\zeta(s)$ の零点の個数評価や，零点を持たない領域の範囲などについて，深い結果がいろいろと得られています．そうした結果が素数分布に関する我々の知識をも改善することがわかっているからです[5, 6, 11]．

■ 2. Dirichlet の L 関数と等差数列中の素数 ■

Riemann のゼータ関数の一般化や類似物は，今日では非常にたくさん導入されていて，ゼータ関数，あるいは L 関数と総称されています．その中でも古くから知られているものの一つが **Dirichlet の L 関数**[3] です．この関数を説明するため，まず **Dirichlet 指標**を定義します．自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ から $\mathbf{C}$ への写像 χ が法 $q\in\mathbf{N}$ の Dirichlet 指標であるとは，周期が q の周期関数で，$(n,q)>1$ なる n に対しては $\chi(n)=0$，そして任意の $m,n\in\mathbf{N}$ に対して $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ を満たしていることを言います（この最後の性質を完全乗法性と言います）．Dirichlet 指標 χ に付随する Dirichlet の L 関数を，

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$$

で定義します．この級数も Riemann のゼータ関数と同様，$\mathbf{C}$ 全体に解析接続され，χ が $(n,q)=1$ なら常に $\chi(n)=1$ という「自明」な指標でない限り，$\mathbf{C}$ 全体で正則関数になることがわかります．

Dirichlet がこの関数を導入したのは，等差数列中の素数の分布を調べるためでした．上述した指標の完全乗法性により，$L(s,\chi)$ も Euler 積表示

$$L(s,\chi)=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \tag{4}$$

を持ちます．この事実を出発点として，前節で述べた素数が無限にあることの Euler による証明の類似を辿ることにより，当時 Legendre によって予想されていた次の定理の証明に，Dirichlet は成功しました．

定理 3　自然数 a,q が互いに素であれば，初項が a で公差が q の等差数列中には無限に多くの素数が存在する．

この定理の証明の鍵となった Dirichlet の発見は，

定理 4　$L(1,\chi)\neq 0$.

という事実です．定理 2 や定理 4 のような，ある領域やある点でゼータ関数や L 関数が 0 にならない，という形の結果は，非消滅定理と呼ばれ，ゼータ関数の理論において非常に大切な役割を果たします[9]．また $L(1,\chi)$ は，単に 0 でない，というだけでなく，二次体の類数という，代数的整数論における基本的な量の情報を含んでいることが知られています．一般にゼータ関数，L 関数の s が整数のときの値は，整数論的な重要な情報を内包していることが多く，今日に至るまで盛んな研究の対象となり続けています．

■ 3. テータ関数と五角数定理 ■

第 1 節で，Riemann が証明した結果の一つとして，**関数等式**という名前に言及しました．正確に言うと，$\zeta(s)$ の関数等式とは次の等式です．

定理 5 任意の複素数 s に対して

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \qquad (5)$$

が成り立つ．ただし $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．

Riemann はこの定理の 2 通りの証明を与えていますが，ここではそのうちの第 2 の証明法を取り上げましょう．この証明は，(5) の左辺を

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right) x^{s/2-1}dx \qquad (6)$$

と積分表示するところから始まります．この表示そのものはガンマ関数の定義から簡単に導くことができます．そこで

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty e^{\pi i n^2 z}$$

（ただし $i=\sqrt{-1}$）とおくと，式 (6) の中の無限和は $(\theta(ix)-1)/2$ です．

級数 $\theta(z)$ は虚部が正の任意の複素数 z に対して収束し，

$$\theta\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2}\theta(z) \qquad (7)$$

なる関係式が成り立つことが，既に Riemann 以前に，Jacobi によって証明されていました．この式を用いて (6) を書き直すことで，関数等式 (5) が証明されます．

虚部が正の複素数全体がなす半平面（複素上半平面）を $\mathbf{H}$ と書くことにしましょう．上で述べたように $\theta(z)$ は $\mathbf{H}$ 上で定義され，その範囲で正則関数になります．これは**テータ関数**と呼ばれるものの一例です．テータ関数も，整数論において極めて重要な役割を演ずる複素関数です．少し一般化して

$$\theta(z,w) = \sum_{n=-\infty}^\infty e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n w}$$

（$w\in\mathbf{C}$）としても，やはり $z\in\mathbf{H}$ に対して収束して z の正則関数を定めます．特に

$$\theta\left(3z, \frac{1-z}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^\infty e^{3\pi i n^2 z + \pi i n(1-z)} = \sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n e^{3\pi i n^2 z - \pi i n z}$$

ですので，$q = e^{2\pi i z}$ とおけば，この右辺は $\sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n q^{(3n^2-n)/2}$ となります．

この指数に現れた $P(n)=(3n^2-n)/2$ は，$n=1,2,3,\ldots$ に従って $1,5,12,\ldots$ という値を取りますが，これらは実は**五角数**と呼ばれる整数です．$P(2)=5$ を，正五角形の頂点の個数だと解釈しましょう．その 5 つの頂点のうちの 1 つを勝手に選んで A とします．A と辺で繋がっている 2 つの頂点を B, C とします．辺 AB, AC をそれぞれ B, C を超えて 2 倍に延ばし，AD, AE とします．そしてこの AD, AE を 2 辺とする正五角形を描きます．この大きい正五角形の頂点（A, D, E たち）と辺の中点（B, C たち）を全部数えると計 10 個あります．これに，元の小さい正五角形の頂点で大きいほうの正五角形には乗っていない点が 2 個ありますので，これも加えると 12 個となります．これが $P(3)$ です．以下同様にして，$P(n)$ を定義するわけです．

任意の自然数は，高々 5 個の五角数の和で書けることが知られています．三角数，四角数，より一般に m 角数というものが同様に定義され，任意の自然数は高々 m 個の m 角数の和で書けます．これは Fermat が書き遺した命題の一つで，最終的には Cauchy によって証明されましたが，18 世紀に整数論を研究した Euler, Lagrange, Legendre らはこの m 角数の問題にも強い興味を持っていました．そして Euler は次の定理を証明しました[1]．

定理 6（**Euler の五角数定理**）

$$\prod_{l=1}^\infty (1-q^l) = \sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n q^{(3n^2-n)/2}. \qquad (8)$$

この左辺は，自然数を，異なる自然数の和として表現する方法は何通りあるか，という問題に関係があります．つまり $m = a_1 + \cdots + a_k,\ 0 < a_1 < \cdots < a_k$ なる表示の仕方を問うわけですが，このうちで k が偶数であるような分割の仕方を $B_1(m)$，奇数であるような分割の仕方を $B_2(m)$ とすれば，(8) の左辺は $\sum_{m=0}^{\infty}(B_1(m) - B_2(m))q^m$ と等しいことが容易にわかります．Euler の定理は，この係数 $B_1(m) - B_2(m)$ の値が，m が五角数であるかどうかによって決定されることを示しています．

■　4. エータ関数と分割数　■

前節で述べた定理 6 は，テータ関数がその左辺のような無限積表示を持っていることを示していますが，実はこの左辺に因子 $e^{\pi iz/12}$ を付け加えたもの

$$\eta(z) = e^{\pi iz/12}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi ilz}\right)$$

も有名な関数で，**Dedekind のエータ関数**と呼ばれます．この関数は (7) と全く同じ形の関係式

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2}\eta(z) \tag{9}$$

を満たします．そして，この関数も整数論において頻繁に利用される複素関数の一つです．例えば二元二次形式のゼータ関数（後述 (15) 参照）の Kronecker の極限公式に現れること[10)]なども重要ですが，ここでは分割数との関係を取り上げましょう．

分割数 $p(m)$ とは，自然数 m を自然数の和として表す方法の個数です．先ほどの五角数定理のときの問題設定と比べると，「異なる」という条件が落ちていますから，今度は和の中で同じ自然数を何回使ってもいいわけです．すると，(8) の左辺の逆数

$$F(q) = \prod_{l=1}^{\infty}(1 - q^l)^{-1}$$

が $p(m)$ の生成関数になっていることがわかります．Hardy と Ramanujan は，Dedekind のエータ関数を $F(q)$ の研究に応用することで，分割数の研究に大きく貢献しました．彼らは，$a = (2/3)^{1/2}\pi$ とおくとき，漸近公式

定理 7

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{e^{a\sqrt{m}}/4m\sqrt{3}} = 1.$$

を証明しました[1,2)]．そしてその研究は Rademacher

に受け継がれ，彼は $p(m)$ の精密な無限級数表示を得たのです．Hardy と Ramanujan の研究は，今日の解析的整数論における標準的な技法の一つである円周法の揺籃としても高く評価すべきものです．

■ 5. 楕円関数と Eisenstein 級数 ■

我々は，テータ関数とエータ関数が，どちらも変換公式 (7), (9) を満たしていることを見てきました．上半平面 $\mathbf{H}$ 上で定義され，この種の変換公式を満たす正則関数は，**モジュラー形式**[7,8]，あるいはより一般に**保型形式**などと呼ばれます．さらにこうした概念は，$\mathbf{H}$ ではなくもっと高次元の多様体上にも一般化されており，現代の整数論において極めて重要な研究対象となっています．なお高次元の場合には現れる保型形式も多変数正則関数となり，従って多変数複素関数論が道具として必要になります．

保型形式の研究の歴史はかなり錯綜したものです．上述した Euler の五角数定理も，保型形式論の一つの出発点と言えるでしょう．しかし一方で，楕円関数論との結び付きも述べないわけにはいきません．

楕円関数とは一言で言えば $\mathbf{C}$ 上定義された有理型関数で，2 つの独立な周期を持つものですが，これもまた整数論において重要な複素関数です．Gauss, Abel, Jacobi らの研究以来，19 世紀には楕円関数の研究は全数学の中でももっとも重要な研究分野の一つでした．そうした流れの中で，Eisenstein や Kronecker らが楕円関数の整数論における重要性を見出していきました[12]．特に，虚二次体上の Abel 拡大体がすべて楕円関数を用いて構成できることを予言した「Kronecker の青春の夢」は，高木貞治氏の類体論によって解決されるまで，当時の整数論の最大の難問の一つでした．

さて ω_1, ω_2 を，どちらも 0 でなく，その比が実数ではないような 2 つの複素数とし，L をこの 2 数で張られる格子，すなわち $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$（$m_1, m_2$ は整数）の形の複素数の全体とします．このとき，

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

で定義される関数を **Weierstrass の $\wp$ 関数**と言いますが，これはもっとも基本的な楕円関数です．実際，任意の楕円関数は $\wp$ と $\wp'$ の有理関数として書き表すことができます．そして，この $\wp(z)$ は $z=0$ において 2 位の極を持つので，そこでの Laurent 展開を考えると，その展開係数として

$$E_k = \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \omega^{-k}$$

（k は 4 以上の偶数）の形の無限級数が現れます．これは格子 L に依存しますので，特に $\omega_1 = z \in \mathbf{H}$, $\omega_2 = 1$ とおけば z の関数

$$E_k(z) = \sum_{m,n}{}' (mz+n)^{-k} \tag{10}$$

が得られます．ここに和 $\sum'$ は $(m,n) = (0,0)$ 以外のすべての整数 m, n にわたります．これが **Eisenstein 級数**と呼ばれる，大変重要なモジュラー形式です．

ここでモジュラー形式の定義をもう少し正確に述べましょう．モジュラー形式に対して要請される変換公式は，群の言葉で定式化されます．整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ と書くとき，群が整数係数の 2 次の特殊線形群

$$\begin{aligned}\Gamma &= SL(2,\mathbf{Z}) \\ &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbf{Z}, \\ ad-bc=1 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

の場合がもっとも基本的で，この群 Γ に対する重さ k のモジュラー形式とは，$\mathbf{H}$ 上で定義された複素正則関数 f で，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{11}$$

を満たし，さらに無限遠点でも正則になっているもののことです．この最後の条件は，$f(z)$ を $q = e^{2\pi iz}$ によって Fourier 展開したとき，負の項が現れず，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \tag{12}$$

と書けることを意味しています．この定義の下で，Eisenstein 級数 (10) は，Γ に対する重さ k のモジュラー形式であることがわかります．

モジュラー形式の Fourier 展開の係数 $a(n)$ は，多くの場合に，重要な数論的意味を持っています．Eisenstein 級数の場合，その定数項は $2\zeta(k)$ であり，また $n \geq 1$ に対する $a(n)$ には約数関数 $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ が現れます．従って Eisenstein 級数の Fourier 係数はよく知られた数論的関数で書ける，と言ってもいいでしょう．これに比べて，定数項が 0 であるようなモジュラー形式（そのようなものを**尖点形式**と言います）の Fourier 係数の性質はもっと神秘的です．

6. Ramanujan のタウ関数

まず，Eisenstein 級数から出発して，尖点形式を構成しましょう．$E_k(z)$ を $2\zeta(k)$ で割ったものを $G_k(z)$ と書くと，その定数項は 1 となります．そして

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}(G_4(z)^3 - G_6(z)^2)$$

と定めると，これは重さ 12 のモジュラー形式になります．しかも作り方から定数項は消えるので，尖点形式です．1728 で割っているのは，1 次の項の係数を 1 にするためです．この関数の Fourier 展開を

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

と書くと，$\tau(1) = 1$ ですが，さらに $\tau(2) = -24$, $\tau(3) = 252$, $\tau(4) = -1472$ などと計算できます．実は $\Delta(z) = \eta(z)^{24}$，すなわち

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi ilz})^{24}$$

であることが知られています．この表示を展開すれば $\tau(n)$ 個々の値は計算できますし，それらの値が整数であることも明らかです．この $\tau(n)$ を **Ramanujan のタウ関数**と言います．この名前は，Ramanujan がこの関数についての極めて興味深いいくつもの性質を証明したり予想したりしたことに由来しています[4)]．

Ramanujan が証明した結果としては例えば合同式 $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$ があります．一方，素数 p に対する $\tau(p)$ の上からの評価 $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ は，**Ramanujan 予想**と呼ばれ，1970 年代に Deligne によって解決されるまで，20 世紀数学の一つの目標ともなっていた有名な問題でした．しかし，ここでは特に，Ramanujan が 1916 年に予想して，すぐ翌年の 1917 年に Mordell によって証明が与えられた，次の結果に注目しましょう．Ramanujan のタウ関数を係数に持つ L 関数

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} \tag{13}$$

を考えます．すると，この関数が Euler 積表示

$$L(s, \Delta) = \prod_p (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s})^{-1} \tag{14}$$

を持つ，というのがその結果です．つまり L 関数 (13) は，(2) や (4) に類似した積表示を持つわけですが，大きな違いは，$X = p^{-s}$ を変数と見なしたとき，(2) や (4) の右辺の括弧の中が X の一次式であるのに対して，(14) の右辺の括弧の中は X の二次式になっている，という点です．このことから (14) のような Euler 積は **2 次の Euler 積**と呼ばれます．Ramanujan の洞察は，Euler 積の概念を大きく拡げることになった素晴らしいものでした．そして Mordell による (14) の証明も，Hecke 作用素という重要な概念の萌芽となる，画期的なものでした．

7. 保型 L 関数

前節で扱った $\Delta(z)$ は尖点形式の一つでした．一般に，$f(z)$ を Γ に対する尖点形式とすると，その Fourier 展開は (12) において $a(0) = 0$ としたものになります．この展開係数 $a(n)$ を用いて

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

とおいたものが，f に付随する**保型 L 関数**です．テータ関数の変換公式 (7) から Riemann が $\zeta(s)$ の関数等式を導いたように，f が満たす関係式 (11) を使うことで，$L(s, f)$ が定理 5 に類似した関数等式を満たすことが証明できます．このことは $L(s, \Delta)$ の場合には Wilton が，そして一般の $L(s, f)$ に対しては Hecke が示しました．さらに Hecke は，$L(s, f)$ がいつ Euler 積を持つか，を記述するために，**Hecke 作用素**の理論を構築しました．群 $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ に対する保型 L 関数が Euler 積を持てば，それは 2 次の Euler 積になります．高次元の多様体に付随するような保型 L 関数の場合にはもっと高次の Euler 積が現れることになります．

保型 L 関数は，解析接続，関数等式，Euler 積などの基本的な性質がかなりよくわかるので，数多くのゼータ関数，L 関数の中でも重要な役割を果たします．今日知られている種々のゼータ関数や L 関数の中には，複素解析的な性質が（例えば解析接続といったごく基本的なことですら）なかなか証明できないものがたくさんあります．しかし，その L 関数が実は保型 L 関数になっている，ということがわかれば，複素解析学の手法が使えて解析的な挙動が詳しくわかるので，有難いわけです．Fermat の予想を解決した Wiles の有名な仕事も，有理数体上定義された**楕円曲線の L 関数**が保型 L 関数になるであろう，という，谷山豊氏によって示唆され志村五郎氏によって定式化された予想

を解いたという意味で，この流れに沿ったものです．Selberg は 1989 年の Amalfi での国際会議で，解析接続や関数等式，Euler 積などの標準的な性質を満たす L 関数のクラスを公理的に設定して研究することを提案し，このクラスは今日では **Selberg クラス**と呼ばれていますが，Selberg クラスに属する L 関数は実はすべて保型 L 関数なのではないか，という意見もあります．

■ 8. Euler 積を持たないゼータ関数 ■

ここまでに種々のゼータ関数，L 関数を紹介してきましたが，これらの多くは Euler 積表示を持ち，その表示が重要な情報をもたらすのでした．しかし一方で，Euler 積を持たないタイプのゼータ関数にも，重要なものがたくさんあります．そのうちでもっとも古典的なものは，**Hurwitz のゼータ関数**

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}\quad(0<\alpha\leq 1)$$

です．これは $\alpha=1$ なら $\zeta(s)$ に他ならず，$\alpha=1/2$ のときにも $\zeta(s,1/2)=(2^s-1)\zeta(s)$ が成り立ちますが，それ以外の α の値に対しては Euler 積を持ちません．しかし，Dirichlet の L 関数が Hurwitz のゼータ関数の一次結合で書けることから，Dirichlet の L 関数の理論において重要な役割を果たします．

Hurwitz のゼータ関数を「多重化」したものが **Barnes の多重ゼータ関数**

$$\zeta(s,\alpha,w_1,\ldots,w_r)=\sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty}(\alpha+w_1m_1+\cdots+w_rm_r)^{-s}$$

です．ここで $\alpha,w_1,\ldots,w_r$ は複素パラメータであり，「多重」という語は和が多重和になっていることを示しています．Barnes の多重ゼータ関数を最初に整数論に応用したのは Hardy と Littlewood で，彼らはある種の三角形の中にある格子点の個数を数える問題や，θ を無理数とするとき $\sum_{n\leq x}\left(\theta n-[\theta n]-\frac{1}{2}\right)$（ただし $[x]$ は x の整数部分）の x の関数としての挙動を調べる問題に $\zeta(s,\alpha,w_1,\ldots,w_r)$ を利用しました．

しかし，Barnes の多重ゼータ関数の整数論における本質的な重要性を発見したのは新谷卓郎氏です．第 2 節で述べた Dirichlet の L 関数を代数体に拡張した，**Hecke の L 関数**と呼ばれる L 関数がありますが，Hecke の L 関数についても，その $s=1$ での値が非常に重要な整数論的な情報を含んでいます．新谷氏はその値が，Barnes の多重ゼータ関数を用いて定義される**多重ガンマ関数**の対数の一次結合で書けることを証明し，総実代数体上の類体構成問題に新機軸を打ち出しました．また新谷氏はその研究の中で，Barnes の多重ゼータ関数を一般化した，**新谷の多重ゼータ関数**を導入しています．

他方，$Q(m,n)=am^2+bmn+cn^2$ を正定値の整数係数二次形式とするとき，その **Epstein のゼータ関数**は

$$\zeta_Q(s)=\sum_{m,n}{}'Q(m,n)^{-s}\tag{15}$$

で定義されますが，これも和が二重和になっている，という意味で二重ゼータ関数の一種である，とも言えるでしょう．Epstein のゼータ関数に対しても第 3 節で述べた定理 5 の証明と同様の方法で関数等式を証明することができますが，それは (15) の右辺の $Q(m,n)$ がある意味で「良い」多項式になっているからです．この観点を押し進めていくと，佐藤幹夫氏の**概均質ベクトル空間**という壮大な理論に到達します．概均質ベクトル空間とそのゼータ関数の理論は佐藤氏，新谷氏らによって開拓され，高次合成則や密度定理など，整数論への多くの素晴らしい応用が見出されています．

これまでに紹介してきたゼータ関数，L 関数はすべて一変数関数でした．しかし，概均質ベクトル空間のゼータ関数の中には多変数複素関数になっているものも存在します．また，近年盛んに研究されている **Euler–Zagier の多重和**

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r)=\sum_{1\leq m_1<\cdots<m_r}m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}$$

は，多変数の多重ゼータ関数の典型例です．

量子ゲージ理論に出てくるある量を計算するために，数理物理学者 Witten によって導入された，Lie 環に付随する **Witten のゼータ関数**も多重ゼータ関数の一種と見なすことができ，最近ではこれも多変数化されて**ルート系のゼータ関数**として研究が進められています．このように今日の整数論においては，一変数の関数論のみならず，多変数複素関数論までもが縦横に用いられており，その役割は今後ますます重要になっていくものと思われます．

参考文献について：ゼータ関数，L 関数やモジュラー形式については日本語の良書もたくさんありますが，

それらは書店でも手に取ることができますので，以下では洋書の入門的な文献だけ挙げておきます．

参考文献

1) T.M. Apostol, “Introduction to Analytic Number Theory”, Springer, 1976.
2) T.M. Apostol, “Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory”, Springer, 1976.
3) H. Davenport, “Multiplicative Number Theory, 2nd ed.”, Springer, 1980.
4) G.H. Hardy, “Ramanujan”, Cambridge Univ. Press, 1940.
5) A. Ivić, “The Riemann Zeta-Function”, Wiley, 1985.
6) A.A. Karatsuba and S.M. Voronin, “The Riemann Zeta-Function”, Walter de Gruyter, 1992.
7) N. Koblitz, “Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, 2nd ed.”, Springer, 1993.
8) T. Miyake, “Modular Forms”, Springer, 1976.
9) M. Ram Murty and V. Kumar Murty, “Non-vanishing Theorems of L-Functions and Applications”, Birkhäuser, 1997.
10) C.L. Siegel, “Advanced Analytic Number Theory”, Tata Inst. Fund. Res., 1980.
11) E.C. Titchmarsh, “The Theory of the Riemann Zeta-function”, Oxford, 1951.
12) A. Weil, “Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker”, Springer, 1976.

（まつもと・こうじ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

多変数関数論における解析接続



神本　丈

複素数を変数とする関数を考えた場合，最も特徴的な性質は解析接続であろう．これが変数の数を複数にしてみると，さらに興味深い現象が見られる．この記事では，ハルトークスによる同時解析接続の発見から話をはじめて，「ハルトークスの拡張定理」とその証明を眺めながら，どのように多変数関数論が発展してきたかを垣間見る．

ところで，最近「多変数関数論」関係の専門書や読み物などが非常に多く出版されている．一変数に関する関数論の本は，大学で使われる教科書などを含めれば，数限りなく出版され続けていると思うが，「多変数」に関しては，日本語で書かれたものは，私の学生時代から思い出しても，出版された本の数はかなり少なかった．ところが，最近どういうわけか面白いものがどんどん出版されている．私が把握しているだけでも，例えば，専門書としては，辻[5]，野口[1]，入門書としては，若林[6]，この分野の巨匠：岡潔に関する読み物としては，高瀬[4]，大沢[2]などが次々と出版されている（大沢先生の本は，近刊）．これらはそれぞれに著者のこの分野への並々ならぬ愛情が感じられるものであり，今後の多変数関数論の研究の発展に大きく貢献するものであることは間違いない．中でも，野口先生の本は傑作で，かなり本格的な専門書でありながら，説明や証明が非常に丁寧に書かれており，学生にとって（実は専門家にとっても）とてもうれしい本である．

1. 同時解析接続の発見

2 次元多重円盤：$\triangle^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ の内部にある次の領域を考える．

$$H_\epsilon = \{z \in \triangle^2 : |z_1| < \epsilon \text{ または } 1-\epsilon < |z_2|\}.$$

ただし，$0 < \epsilon < 1$ とする．H_ϵ を**ハルトークス図形**と呼ぶ（図 1）．

次は，同時解析接続と呼ばれる現象として最初に発見されたもので，多変数関数論という新しい研究分野の誕生をもたらした．

定理 1（ハルトークス，1906 年）　H_ϵ 上の正則関数 f は $\triangle^2$ まで解析接続される．すなわち，$\triangle^2$ 上正則な関数 F で H_ϵ 上 $F = f$ となるものが存在する．

この定理は，コーシーの積分定理を使って簡単に証明できる．実際に，積分：

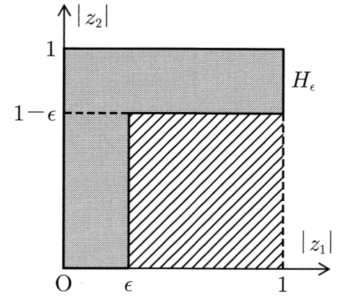


図 1　ハルトークス図形．

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\delta}\frac{f(z_1, w)}{w - z_2}dw$$

$(1-\epsilon < \delta < 1)$ を使えば，定理にある多重円盤まで拡張された正則関数が得られる．

上の定理の主張は，H_ϵ 上のどんな正則関数も，必ずそれより真に広い領域 $\triangle^2$ にまで解析接続されてしまう（**同時解析接続**）ということを意味している．このような現象は，明らかに一変数の場合では起こり得ないものである．

この定理の簡単な帰結としては，多変数の場合には，「特異点や零点は孤立しない」ということがある．実際，もし特異点が孤立していることを仮定すると，ハルトークス図形をその正則関数の定義域の中に上手にねじ込んで，凹んだところでその点をはさんでやれば，その点を含む開集合まで正則に拡張されて矛盾が得られる．このように，特異点は連続的につながっているということがわかる．もっというと，特異点の集合は著しい幾何学的な特徴を持っていることも，後に示されることになる．

n 次元（$n \geq 3$）の場合にもハルトークス図形は，$\triangle^n$ 内に自然に一般化できるが，それらも同様にハルトークス図形と呼び H_ϵ と書くことにする（この記事を読む分には，2 次元の場合だけで考えてくだされば十分である）．上で「ねじ込む」とかいう少し乱暴な議論をしたが，実際は，双正則写像を用いて考える空間に $\triangle^n$ を写してやり，ハルトークス図形の像が，考える正則関数の定義域の中に含まれるようにしてやる．このような操作をした後，定理 1 を使って，$\triangle^n$ の像まで局所的に正則拡張を行う操作を，**解析的円盤の方法**（analytic disc method）と呼ぶ（双正則写像で写した像に関しても定理 1 と同様な解析接続がなされる）．また，領域 D が**ハルトークス擬凸**であるとは，$\triangle^n$ を D のある空間に双正則写像で写したとき，H_ϵ の像が D に含まれるならば，常に $\triangle^n$ の像も D に含まれている，ことをいう．逆に，領域 D がハルトークス擬凸でないとき，解析的円盤の方法で，どのような D 上の正則関数も，D より真に大きい開集合まで解析接続されてしまうことがわかる．この性質は，本質的に幾何学的なものである．図 2 の領域 D はハルトークス擬凸ではないが，感覚的にはこの概念が，ある種の凸性を示すものであることがわかるであろう．

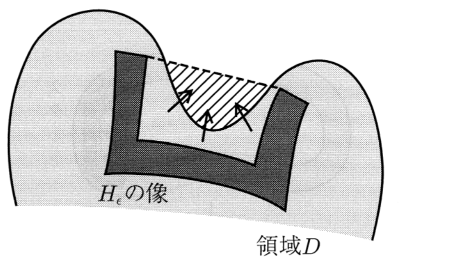


図 2　解析的円盤の方法．

2. ハルトークスの拡張定理

さて，この記事で主役となる定理を紹介しよう．

> **定理 2**（ハルトークスの拡張定理）　D を $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界領域でその境界が連結なものを考える．境界の任意の連結開近傍 U 上で正則な関数 f は D まで解析接続される．すなわち，D 上正則な関数 F で $D \cap U$ 上 $F = f$ となるものが存在する．

この定理は，多変数の場合の特長を明確に示した，最も意味のわかりやすい定理の一つで，定理自体も重要であるが，以下に述べるように，その証明も，なされた歴史的経過を含めて，とても面白い．この記事では，3 種類の証明のアイデアを紹介する．

2.1 解析的円盤の方法による証明

定理 1 を基本とした解析的円盤の方法を使えば，上の定理は簡単に証明できるような気がする，というのは自然な感覚であろう．すなわち，図 3 のように，U の中に上手にハルトークス図形を（双正則写像で）写してやって内部に少しだけ解析接続させてやる．そうするともう少し広い領域で正則拡張された関数ができるわけであるが，さらに同じ操作を繰り返すことにより，有限回の解析接続で内部を全部埋め尽くすことができる，という作戦である．一つ一つの操作は，正則となる領域がより広くなっていくことから，ハルトークス図形も

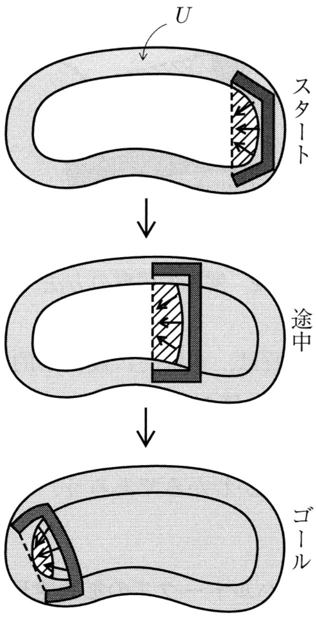


図3 解析的円盤の方法による証明のレシピ？

ねじ込みやすくなるので，うまくいくに違いない．これで，この定理の証明はできた…，としてよいであろうか．少し話がそれるが，医学というか生物学の分野で世間を騒がせた「STAP細胞」に関する事件は記憶に新しい．結局何が問題だったかというと，写真の切り貼りや他人の論文のコピペがどうのこうのということよりも，STAP細胞を，誰もが再現できるようなレシピを公開できなかったところであろう．そうでないと，科学の世界ではその存在を肯定してもらえないということである．定理のように「解析接続はあります！」というためには，仮定の条件をみたすどんな領域や開近傍に対しても，目標となる解析接続を作るための数学的にちゃんとしたレシピを，提示しなければならない．この場合，何が一番心配なのかというと，局所的に解析接続を有限回続けていって，ちゃんと大域的な一価の正則関数が作れるかということである．一変数の場合を思い出すと，例えば，$\sqrt{z}$ や $\log z$ などの関数は，正の実軸の近傍から解析接続を繰り返して，原点の周りをぐるりと回って戻ってきたら，一価の正則関数にならない．定理の証明の際に，このようなことが起きないように，大域的に解析接続が実行できることを示さねばならない．

歴史的には，後で述べる別の2つの方法で，一価の解析接続をちゃんと作ることができ，証明も誰もが納得できるものが得られたので，調査委員会を立ち上げる必要もなく，解析的円盤の方法でも，上手にやればたぶん大丈夫と長い間思われていたのだろう．しかし，1998年，フォルネス[7]がハルトークス図形を使って，∂D の内側のみ埋めていくだけでは，どうしても解析接続した関数が一価にならない，そんな定理2の条件をみたす領域を見つけてしまった．その領域は，奇妙な形をしたものではあるが，その反例によって，先に述べた図3のようなレシピでは，一般的にはだめだということが示された．解析的円盤の方法では，この定理は証明できないのかと心配されたが，ハルトークスの同時解析接続に関する論文の出版から，ちょうど100年後の2006年に，メルケルとポーテン[9]によるプレプリントが発表され，モース理論を用いて，内側だけではなく，同時に外側にも拡張しながら解析接続をきれいにやっていけばうまく目標となる一価の正則関数を作ることができる，ということが示された．この論文は力作で，読む方も結構大変である．私は発表されてすぐに，九州大学の大学院生たちと一緒にセミナーで丁寧にこの論文を読んだ．証明の重要な部分は，次のように説明できる．U の境界をなめらかにした後，その境界を「非特異点からなる超曲面」と有限個の「非退化な特異点」（$x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{2n}^2=0$ で定義された超曲面の原点と本質的に同じ形をした点）に分けることができることを示し，非特異な部分の一価な解析接続は容易であるから，特異点を通り抜ける瞬間に解析接続を一価のまま行うことができることを，すべての場合に関して慎重に調べればよい．丁寧に絵を描いて調べなくてはならないため，毎回のセミナーでは，学生たちにより黒板が，白，赤，黄，青，緑，紫，茶とカラフルなチョークで彩られ，とても楽しかった．正式に出版された論文は，残念ながら図が白黒になってしまったが，プレプリントの図はすべてカラーで22箇所もある．誰でもインターネットで手に入れることができるので興味のある人は眺めてほし

い．予備知識もほとんどいらない．時間はかかったが，私自身は学生の皆さんと，彼らの論文が完璧なレシピであることを，確認できたと思う．とにかくこの定理は，「解析的円盤の方法」を使って証明できることがわかった．

2.2 積分核を用いた証明

解析的円盤の方法による定理2の証明は，素朴で私自身はとても好きなのであるが，とにかく，証明が正しいかどうか確かめるのが大変である．それに比べて，今から述べる積分核を使った証明は，アイデアがわかりやすく，解析的な証明としては最初のものである．詳しくは，ランゲの本[11]を参照．

証明には，次の多変数版のリュービルの定理が使われる．

補題1 K を $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 内のコンパクト集合とするとき，$\mathbb{C}^n \setminus K$ 上有界で正則な関数 f は，$\mathbb{C}^n \setminus K$ の非有界連結成分の領域上定数関数となる．

一変数のときと違うのは，全空間でという条件が必要ないことであり，実はこれが多変数の場合の証明の際に，決定的に重要な性質となる．補題の証明も多変数の場合の特徴的な性質を示しているので紹介しておこう．

開球 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$ が K を含むように十分大きく $R > 0$ をとる．まず，座標 z を z_1 と $z' = (z_2, \ldots, z_n)$ に分けて考え，$w' = (w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ を $|w'| > R$ となるようにとって固定しておく．複素直線 $L = \{(z_1, w') \in \mathbb{C}^n : z_1 \in \mathbb{C}\}$ は K と交わらないので，$f(\cdot, w')$ は $\mathbb{C}$ 上で正則となり，さらに仮定から有界でもあるので，一変数のリュービルの定理から定数となる．この定数は w' に依存しているように思えるが，今の議論を，他の変数に関して行えば，十分遠くにおいては，f は完全に定数関数となることがわかる．あとは，一致の定理により，補題を得る．

さて，定理2の積分核を用いた証明には，積分核の理論が必要で，ここでは完全なものは紹介できない．しかしながら基本的なアイデアは明確で，わかりやすいのでそれを説明しよう．

定理の仮定より，境界の近傍 U は2つの単連結な領域 D_1 と D_2 により，$U = D_2 \setminus \overline{D_1}$ と表される．正則関数 f の分解が重要となるわけであるが，一変数の場合を使って，その分解について説明をする．f^+ と f^- を次のように定義する．この場合，領域 D_1, D_2 の境界 $\partial D_1, \partial D_2$ は単純閉曲線である．

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{f(w)}{w - z}dw,$$
$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{f(w)}{w - z}dw.$$

ここで，f^+ は D_2 上正則，f^- は $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D_1}$ 上正則で，$|z| \to \infty$ のとき，$f^- \to 0$ となることは容易にわかる．さらに，コーシーの積分公式を用いると，U 上 $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ となる分解が得られる．

多変数の場合には，コーシーの積分公式の一般化として，**ボホナー・マルチネリの積分公式**という非常に有用な公式が得られており，これを用いると，上と同様な性質を持つ分解が得られる（正確に述べると，この公式は境界に C^1 級という仮定が必要となる）．

さて，いま2次元以上の場合にも，上のような分解 $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ が得られたとして証明を行う．f^- は十分大きな開球の外で正則で有界であるので補題1を用いると，そこで定数となる．さらに極限まで考え，一致の定理を用いると，f^- は $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D_1}$ で恒等的に零となる．したがって，上の分解より，$D_2 \setminus \overline{D_1} (= U)$ 上，$f = f^+$ となり，f^+ は D_2 上正則だったことを思い出すと，関数 f^+ が目標となる正則拡張となることがわかる．

今回の場合は，目標となる正則拡張となる関数が，ボホナー・マルチネリの公式による積分核を使った形で書けることがわかった．その公式に現れる積分核は，やや複雑な形をしているが，明示的であり，結局目標となる正則拡張を生でみることができ，一価性の問題も心配ない．

2.3 $\bar{\partial}$ 方程式による証明

次に紹介する証明は，エーレンプライスによるものであるが，現在国際的に最も有名な多変数関数論の教科書であるヘルマンダーの本[8]に，紹介されているため，ハルトークスの拡張定理の証明としては，最も有名なものである．証明自体は一番短い．

まず，本質的に重要となる補題を紹介する．

補題 2　D を $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界領域とし，$\alpha_j \in C_0^\infty(D)$ $(j = 1, \ldots, n)$ は

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial \bar{z}_j} \quad (j, k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

をみたすとする．このとき，

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = \alpha_j \quad (j = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

をみたす $u \in C_0^\infty(D)$ が存在する．ただし，$C_0^\infty(D)$ は，D 内にコンパクト台を持つ C^∞ 級関数の集合とする．

上の方程式 (2) を $\bar{\partial}$ **方程式**と呼ぶ．補題の示す重要なところは，コンパクト台を持つ $\bar{\partial}$ 方程式の解が存在するというところである．これは，一変数では起こり得ないことであり，多変数固有の性質がそこに現れている．この補題の証明は長くないが，ここでは省略する．証明には，ここでもコーシーの積分公式が用いられることだけ言及しておく．

さて，定理 2 の証明を，補題 2 を用いて行おう．D_1, D_2 は積分核を用いた証明で使った領域とする．χ を D_1 上 1 となるような $C_0^\infty(D_2)$ に属する関数とする．このとき，補題 2 より

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = -\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j} \cdot f \quad (j = 1, \ldots, n)$$

をみたす $u \in C_0^\infty(D_2)$ が存在する（右辺の関数が補題の条件 (1) をみたすことを確認すること）．今，D_2 上の関数 F を $F = (1-\chi) \cdot f - u$ と定めると，簡単な計算から，F は D_2 上正則となることがわかる．さらに D_2 の境界の小さな近傍 V が存在して，$V \cap U$ 上で $F = f$ なることがわかるが，一致の定理より，U 上 $F = f$ となることもわかる．これより，F は求める正則拡張である．

正則拡張の関数は，$\bar{\partial}$ 方程式の解を用いて書けることがわかった．

2.4 定理 2 の証明に関するコメント

ここまで読んで頂いた方は，結局ハルトークスの拡張定理を，ハルトークス自身が証明したのか，というところが気になるかもしれない．こういう問題についていい加減なことをコメントすると，後で偉い先生にお叱りを受けたりすることになりかねないので，避けて通りたいものではあるが，せっかくここまで読んで頂いた方のために，私がたぶん正しいだろうと思っている情報について，少し腰のひけた感じで説明したい．以下は，メルケルとポーテンの論文[9]の序文に書かれていることを大いに参照している．ハルトークス自身は，定理 1 を発表した論文の中で，定理 2 のような定理を，一価性を言及しないで，当時の典型的な表現で述べたらしく，その定理の証明も別のところで正確に行ったらしい．定理 2 のような形で初めて主張を行ったのは，オズグット[10]で，ハルトークスの仕事をいくつか紹介した後で，この定理と証明を述べている．実際，多変数関数論の古典的和書：酒井[3]には，定理 2 は，「ハルトークス・オズグットの定理」と書かれている．ただ，残念ながら，オズグットのつけた証明は，D が球の場合ですら破綻しているらしい．酒井[3]には，定理 2 の証明として，ブラウンの 1936 年に発表された長いレシピが掲載されている．その後で，一価性を示すためには証明が極めて複雑になるのだ，ということがコメントされている（ただし，メルケルたちはこのブラウンのレシピに懐疑的である）．もちろん，メルケルたちのレシピは一つの例に過ぎず，他の誰かがちゃんとしたレシピを持っていた可能性を，完全に否定することはできない．

「積分核を用いた証明」も，ずばり誰によるものだ，となかなか言い切れないところがある．多変数版のリュービルの定理と正則関数の分解を使った証明は，特別な場合に，1939 年にフューターにより発表されている．定理 2 の一般の条件で定理

が正確に証明されたと言えるのは，積分核の理論が成熟していく中で，マルチネリ（1942/43 年）とボホナー（1943 年）により独立に，積分公式が完成されたところである．この辺りの詳しい事情は，ランゲ[12]が詳しく書いている．定理 2 の f を領域の境界上の CR 関数という仮定にした，ある意味でより強い定理は，「ボホナーの拡張定理」と呼ばれていることが多いが，実はその呼び方は間違っているということも，ランゲ[12]が説明している．ここで，超曲面上の CR 関数とは，接コーシー・リーマン方程式という微分方程式をみたす関数である．ある種の正則性をもつ関数と考えてよい．

「$\bar{\partial}$ 方程式による証明」は，1961 年にエーレンプライスにより発表された．証明で本質的な補題 2，すなわちコンパクト台に関するコホモロジーの消滅，はもっと一般的な形ですでに 1953 年にはセールにより示されている．

結局，定理 2 は，多変数関数論の研究の発展とともに深く理解され，自然な形で証明も付けられていったような印象を受ける．「積分核の理論」や「$\bar{\partial}$ 方程式の理論」がいかに有効であるかを示してもいる．逆に，定理 2 のような意味のわかりやすい定理に，あっさりと解析的円盤の方法だけで，きれいな証明が与えられなかったことが，新しい数学的な道具の必要性を認識させ，むしろその後の研究の発展を促した側面もあるような気もする．従って，私個人は，この定理に関しては，誰が最初に証明したかはそれほど重要な問題とは思わない．チーム「多変数関数論」による長期間の連係プレーによる遺産として考えると，ハルトークスの解析接続に関する深い考察を賞して，定理 2 は今後も「ハルトークスの拡張定理」と呼ばれ続けてほしい．

3. 正則領域とレビ問題

定理 1 や定理 2 のような同時解析接続の発見から，自然に正則領域という概念が生まれる．すなわち，これ以上真に大きい領域に解析接続されないような正則関数が存在するような領域を**正則領域**と呼びその形状がどのようになっているかが，その後の多変数関数論の問題意識の中心となった．次の定理は，定義から容易に示される．

定理 3　正則領域はハルトークス擬凸である．

この逆が成り立つかという問題は非常に難しく，**レビ問題**（ハルトークスの逆問題）と呼ばれた．ご存知のように，この問題は日本人数学者：岡潔により肯定的に解決されたことは有名である．レビ問題解決は，ハルトークスの拡張定理の場合と違って，ほとんど岡潔単独によるものであるが，それはそれで深いストーリーがある．この辺りは，冒頭に述べた最近の書物にいろいろな形で書かれているので，興味のある方は，これらを読んで頂きたい．

参考文献

1) 野口潤次郎：『多変数解析関数論』，朝倉書店，2013 年．
2) 大沢健夫：『大数学者の数学・岡潔—多変数関数論の建設』，現代数学社，近刊．
3) 酒井栄一：『多変数関数論』，共立出版，1966 年．
4) 高瀬正仁：『岡潔とその時代　I 正法眼藏，II 龍神温泉の旅』，みみずく社，2013 年．
5) 辻　元：『複素多様体論講義』，サイエンス社，2012 年．
6) 若林　功：『多変数関数論』，共立出版，2013 年．
7) Fornæss, J.E.: The disc method, *Math. Z.*, **227** (1998), 705–709.
8) Hörmander, L.: “An Introduction to Complex Analysis in Several Variables”, Third Edition, North-Holland (1990).
9) Merker, J and Porten, E.: A Morse-theoretical proof of the Hartogs extension theorem, *J. Geom. Anal.* **17** (2007), 513–546（プレプリント：http://de.arxiv.org/pdf/math/0610985.pdf）.
10) Osgood, W.F.: “Lehrbuch der Funktionentheorie”, Bd II, B.G. Teunber, Leipzig, (1929).
11) Range, M.: “Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables”, GTM, **108**, Springer-Verlag, New York, 386, (1986).
12) Range, M.: Extension phenomena in multidimesional complex analysis: Correction of the histrical record, *Math. Intelligencer* **24** (2) (2002), 4–12.

（かみもと・じょう，九州大学大学院数理学研究院）

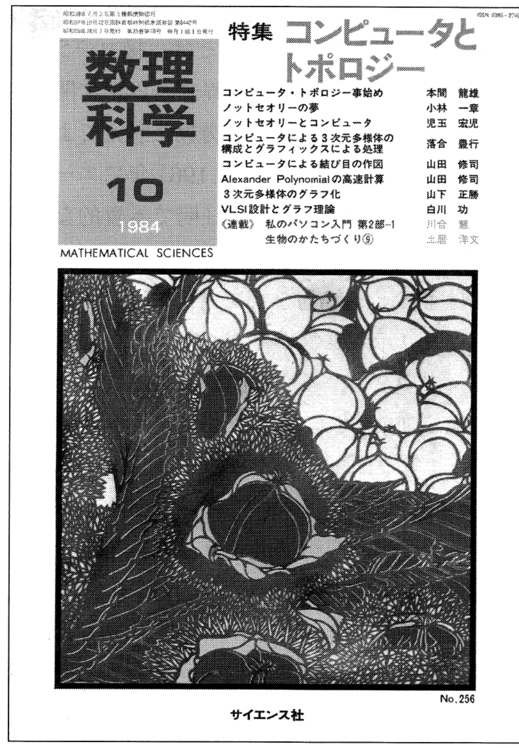
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

小林　一章

1984年10月号

1984年10月号の特集「コンピュータとトポロジー」に「ノットセオリーの夢」という記事を執筆しました．そこではコンピュータを使ってトポロジーを研究しようとしたとき，どれほどのことができるかということを書きました．コンピュータは主にパソコンとし，トポロジーにおける不変量などの計算よりはむしろグラフィック機能を使ってどれほどのことができるかということを取り上げました．30年という年月は現在の科学の進歩においてはまことに十分な時間であり，コンピュータに関して言えば現在のパソコンは30年前のミニコンはおろか，センターマシンにも匹敵する能力を備えるに到り，数学ではフェルマーの最終定理が解決されました．トポロジーでも私の学生時代には問題としてあったシェンフリーズ予想，三角形分割可能予想，主予想 (Hauptvermutung) もすべて解決され，最後の難問といわれたポアンカレ予想もついにペレリマンによって2002年に解決されてしまいました．そのような30年間の進歩の後で1984年10月号の記事を眺めて見ると今やIllustrator他の描画ソフトがいくつかあり，私が30年前に書いた手書きの図はそれらのソフトを使ってあまり形にこだわらなければほとんど数分で書けるようになりました．残念ながら私は相変わらず手で図を書いていますが．またノットセオリーでいえばノットの図付で非常に多くの不変量が示されるKnot Info等のソフトも閲覧できます．しかし私の夢は貪欲で，4次元 $\mathbf{R}^4$ の中に曲面 $\mathbf{F}$ を入れ，第4座標が t の超曲面 $\mathbf{R}^3_t$ で $\mathbf{F}$ を切断し，その切り口である曲線の変化を見てみたいと考えています．ただ，この問題設定では解決できていないと思います．これはトポロジストの思いを如何に計算機が受け入れ可能な情報に変換できるかいうことになるかと思います．ノットとかノットしている曲面は標準ではない円や曲面ですから数式で表現するのは不可能です．逆に切断の切り口に出てくる曲線たちを積み上げげて，パソコンが曲面の全体像を把握し，曲面ノットの様々な不変量を計算してくれるとか，ヘゴード曲面上のメリディアン・ロンジチュード系を情報化して入力してやれば，パソコンが，その結果できる3次元多様体の様々な不変量を出力してくれるということは少し頑張るとできるかもしれません．



30年前に比べればコンピュータの能力も，人間の研究手法も格段に進歩しました．これらを活用すれば私の30年前の夢も実現できるかもしれません．夢を見た個人が高齢化するという事実を別にすれば．

（こばやし・かずあき，東京女子大学名誉教授）

大学院入試問題からみた大学の数学

数学のより深い理解を目指す

最終回

微分方程式2

偏微分方程式

海老原 円・太田 雅人

17.1 1次元波動方程式

連載の最終回となる今回は，偏微分方程式に関する問題を取り上げる．代表的な2階線形偏微分方程式である，**波動方程式**，**熱方程式**，**ラプラス方程式**について考察する．

まず，1次元波動方程式に関する問題から始めよう．

問題 17.1 （早稲田大学大学院先進理工学研究科物理学及応用物理学専攻，平成23年度） 1次元波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t,x) = 0 \quad (v \text{ は定数})$$

の一般解が任意関数 f, g を用いて

$$u(t,x) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

と与えられることを示せ．また，初期値が

$$u(0,x) = F(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\right|_{t=0} = G(x)$$

と与えられたとして，$u(t,x)$ を $F(x)$ と $G(x)$ で表せ．

解答例 変数 $\xi = x - vt$, $\eta = x + vt$ を用いて，$w(\xi,\eta) = u(t,x)$ と変数変換すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

となり，$w(\xi,\eta)$ は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 0$$

を満たす．この方程式の一般解は，任意関数 f, g を用いて

$$w(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

で与えられるから，1 次元波動方程式の一般解は

$$u(t, x) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

となる．

次に，この一般解が初期条件を満たすように，関数 f, g を決める．まず，

$$F(x) = u(0, x) = f(x) + g(x). \tag{17.1}$$

また，$G(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -vf'(x) + vg'(x)$ より，

$$\frac{1}{v}\int_0^x G(y)\,dy = -f(x) + g(x) + C_0 \quad (C_0 = f(0) - g(0)) \tag{17.2}$$

だから，(17.1), (17.2) より

$$2f(x) = F(x) - \frac{1}{v}\int_0^x G(y)\,dy + C_0, \quad 2g(x) = F(x) + \frac{1}{v}\int_0^x G(y)\,dy - C_0$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x - vt) + g(x + vt) \\ &= \frac{1}{2}\{F(x - vt) + F(x + vt)\} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} G(y)\,dy \end{aligned} \tag{17.3}$$

となる． **解答終わり**

1 次元波動方程式の初期値問題の解表示 (17.3) は**ダランベールの公式**と呼ばれる．これは頻出問題であり，類題が多くの大学院で出題されている．

次は，消散項付きの**クライン・ゴルドン方程式**の解の減衰に関する問題である．

問題 17.2 （京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻，平成 24 年度） C^∞ 函数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}^2$ 上で偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - u(t, x)$$

を満たし，$|x| > |t| + 1$ では $u(t, x) = 0$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2\,dx = 0.$$

解答例　$u(t, x)$ を x に関して**フーリエ変換**した関数を

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} u(t, x)e^{-ix\xi}\,dx \quad ((t, \xi) \in \mathbb{R}^2)$$

とする．このとき，$\hat{u}(t,\xi)$ は

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t,\xi) + 2\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -(\xi^2+1)\hat{u}(t,\xi)$$

を満たす．これは実数 ξ をパラメータとする t に関する 2 階線形常微分方程式であり，一般解は，任意定数 $a(\xi)$, $b(\xi)$ を用いて

$$\hat{u}(t,\xi) = a(\xi)e^{-t+i\xi t} + b(\xi)e^{-t-i\xi t}$$

で与えられる．ここで，初期条件を

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

とすると，

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(0,\xi) = a(\xi) + b(\xi),$$
$$\hat{g}(\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = (-1+i\xi)a(\xi) + (-1-i\xi)b(\xi)$$

だから，

$$a(\xi) = \frac{1+i\xi}{2i\xi}\hat{f}(\xi) + \frac{1}{2i\xi}\hat{g}(\xi), \quad b(\xi) = \frac{-1+i\xi}{2i\xi}\hat{f}(\xi) - \frac{1}{2i\xi}\hat{g}(\xi)$$

となり，

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t}\left\{\left(\cos t\xi + \frac{\sin t\xi}{\xi}\right)\hat{f}(\xi) + \frac{\sin t\xi}{\xi}\hat{g}(\xi)\right\}$$

である．このとき，$t>0$ に対して

$$\begin{aligned}|\hat{u}(t,\xi)| &\le e^{-t}\left\{\left(|\cos t\xi| + t\left|\frac{\sin t\xi}{t\xi}\right|\right)|\hat{f}(\xi)| + t\left|\frac{\sin t\xi}{t\xi}\right||\hat{g}(\xi)|\right\} \\ &\le (1+t)e^{-t}\left(|\hat{f}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)|\right)\end{aligned}$$

だから，パーセバルの公式より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(t,\xi)|^2\,d\xi &\le (1+t)^2 e^{-2t}\int_{\mathbb{R}}\left(|\hat{f}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)|\right)^2\,d\xi \\ &\le 2(1+t)^2 e^{-2t}\left(\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}}|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi\right) \\ &= 2(1+t)^2 e^{-2t}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,dx\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$t\to\infty$ のとき，$(1+t)^2 e^{-2t} \to 0$ だから，

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2\,dx = 0.$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**解答終わり**

17.2 熱方程式

この節では，熱方程式に関する問題を考察する．

問題 17.3 （東北大学大学院工学研究科機械系 4 専攻，平成 25 年度） 関数 $u(x,t)$ は次の偏微分方程式ならびに境界条件を満足するものとする．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L,\ t > 0),$$

$$u(0,t) = a, \quad u(L,t) = b, \quad u(x,0) = f(x).$$

ただし，a, b は定数であり，L は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ を満たす解 $u_0(x)$ を求めよ．

(2) $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ が満たす偏微分方程式および境界条件を導け．

(3) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \{u(x,t) - u_0(x)\}^2\, dx \leq 0.$$

(4) $a = 0,\ b = 1,\ L = 1$ とする．

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right), \\ 1 & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

のとき，$u(x,t)$ を求めよ．

解答例 **(1)** $u_0(x)$ は

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2}(x) = 0 \quad (0 < x < L), \quad u_0(0) = a, \quad u_0(L) = b$$

の解だから，$u_0(x) = a + \dfrac{b-a}{L}x$ である．

(2) $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, \quad t > 0),$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad v(x,0) = f(x) - u_0(x)$$

を満たす．

(3) 前問 (2) の結果と**部分積分**により，$v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ に対して

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v(x,t)^2\, dx = \int_0^L v(x,t)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\, dx = \int_0^L v(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\, dx$$

$$= \left[v(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \left\{\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right\}^2 dx = -\int_0^L \left\{\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right\}^2 dx$$

が成り立つ．よって，

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \{u(x,t) - u_0(x)\}^2\, dx \leq 0.$$

(4) $a = 0,\ b = 1,\ L = 1$ とすると，(1) より，$u_0(x) = x$ である．
また，$g(x) = f(x) - u_0(x)$ とおくと，

$$g(x)=\begin{cases} x & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{2}\right), \\ 1-x & \left(\dfrac{1}{2} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

であり，(2) より，$v(x,t)=u(x,t)-u_0(x)$ は

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0<x<1,\ t>0),$$

$$v(0,t)=0, \quad v(L,t)=0, \quad v(x,0)=g(x)$$

を満たす．この初期・境界値問題は，連載第 14 回の問題 14.2 と同様に，**フーリエ級数**を用いて解くことができる．途中の計算は省略し，結果だけ述べると，$g(x)$ は

$$g(x)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}\sin(2k-1)\pi x \quad (0\le x\le 1)$$

とフーリエ級数展開でき，解 $v(x,t)$ は

$$v(x,t)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\sin(2k-1)\pi x$$

で与えられる．よって，求める解 $u(x,t)$ は

$$\begin{aligned} u(x,t)&=u_0(x)+v(x,t) \\ &=x+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\sin(2k-1)\pi x \end{aligned}$$

となる．　**解答終わり**

17.3 ポアソン方程式・ラプラス方程式

この節では，ポアソン方程式とラプラス方程式に関する問題を取り上げる．

問題 17.4（東京大学大学院理学系研究科物理学専攻，平成 23 年度）以下ではポアソン方程式，またはラプラス方程式の解を様々な次元 (d)，境界条件の下で求める．

(1) まず 1 次元（$d=1$）の場合を考える．

(i) 領域 $x\in[0,1]$ で定義された連続関数 $u(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\delta(x-y), \quad 0<y<1$$

を境界条件 $u(0)=u(1)=0$ の下で解け．ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である．

(ii) 上で得られた解 $u(x)$ を $G(x,y)$ と書く．このとき領域 $x\in[0,1]$ で定義される，より一般的な微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\rho(x)$$

の解 $v(x)$ を $G(x,y)$ を用いて書き下せ．ただし境界条件は $v(0)=v(1)=0$ とし，右辺の $\rho(x)$ は $\rho(0)=\rho(1)=0$ を満たす任意関数とする．

(2) 次に 2 次元 ($d=2$) の場合を考える．2 次元平面の直交座標を (x, y)，複素座標を $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$，極座標を r, θ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) とする．

(i) 単位円の内部 ($r < 1$) で定義された関数 $u_n(x, y) = z^n + \bar{z}^n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) はラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = 0$$

の解であることを示せ．またこの関数は境界 ($r = 1$) でどのような値をとるのか，θ の関数として表せ．

(ii) 単位円の内部 $r < 1$ でラプラス方程式を満たし，境界条件

$$u(x, y)\Big|_{r=1} = |\theta|, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

を満たす関数 u を，境界値に対するフーリエ級数展開を用いて求めよ．

(3) d 次元 ($d \geq 3$) ポアソン方程式

$$\nabla \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) = -\prod_{a=1}^{d} \delta(x_a), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

を，定義域 $\mathbb{R}^d$，境界条件 $\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = 0$ の下で考える．発散定理

$$\int_V d^d x \, \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \int_{\partial V} dS \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}$$

を用いて解 $u(\boldsymbol{x})$ を求めよ．ここで V は $\mathbb{R}^d$ 内のなめらかな境界 ∂V を持つ有界な領域，$\boldsymbol{F}$ はベクトル値関数，$\boldsymbol{n}$ は ∂V 上の単位法線ベクトル，dS は ∂V の超面積要素である．(必要であれば d 次元空間内の半径 1 の超球面 $\sum_{i=1}^{d} (x_i)^2 = 1$ の超面積が $\dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ であることを用いても良い．ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である．)

解答例 **(1) (i)** 方程式を 0 から x まで積分すると

$$\frac{du}{dx}(x) = C - \int_0^x \delta(t - y)\, dt = C - H(x - y), \quad H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる．ここで，C は定数である．さらに，これを積分すると，

$$u(x) = C_1 + C_2 x - (x - y)H(x - y), \quad 0 \leq x \leq 1$$

となる．ここで，境界条件より，

$$0 = u(0) = C_1, \quad 0 = u(1) = C_1 + C_2 - (1 - y)$$

だから，$C_1 = 0$, $C_2 = 1 - y$ となる．よって，求める解は

$$u(x) = (1 - y)x - (x - y)H(x - y) = \begin{cases} (1 - y)x & (0 \leq x \leq y), \\ y(1 - x) & (y \leq x \leq 1) \end{cases}$$

である．

(ii) 求める解は

$$v(x) = -\int_0^1 G(x,y)\rho(y)\,dy$$

で与えられる．実際，$v(x)$ を 2 回微分すると，

$$\frac{d^2v}{dx^2}(x) = -\int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)\rho(y)\,dy = \int_0^1 \delta(x-y)\rho(y)\,dy = \rho(x)$$

となり，$v(x)$ は与えられた方程式を満たすことが分かる．

また，$G(0,y) = G(1,y) = 0$ $(0 < y < 1)$ だから，

$$v(0) = -\int_0^1 G(0,y)\rho(y)\,dy = 0, \quad v(1) = -\int_0^1 G(1,y)\rho(y)\,dy = 0$$

となり，境界条件も満たしている．

(2) (i) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，z^n は複素平面全体で正則だから，z^n の実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ は**コーシー・リーマンの方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

を満たす．これから，$u(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

を満たすので，$u_n(x,y) = z^n + \bar{z}^n = 2u(x,y)$ もラプラス方程式を満たす．

また，極座標で表すと，

$$u_n(x,y) = r^n e^{in\theta} + r^n e^{-in\theta} = 2r^n \cos n\theta$$

となるから，$r = 1$ のとき，$u_n(x,y)\big|_{r=1} = 2\cos n\theta$ となる．

(ii) 連載第 14 回の問題 14.1 で計算した結果を用いると，$|\theta|$ は

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とフーリエ級数展開できる．

ここで，(i) より，各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$r^n \cos n\theta$ はラプラス方程式の解だから，**重ね合わせの原理**より，求める解は

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta$$

となる．

(3) (i) $u(\boldsymbol{x})$ は**球対称**であるとし，$u(\boldsymbol{x}) = w(r)$, $r = |\boldsymbol{x}|$ とすると，

$$\nabla \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) = \frac{d^2 w}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{dw}{dr}(r) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{dw}{dr}(r)\right)$$

となる．また，$\boldsymbol{x} \neq 0$ のとき，$\displaystyle\prod_{a=1}^{d} \delta(x_a) = 0$ だから，$r > 0$ のとき，$w(r)$ は

$$\frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{dw}{dr}(r)\right) = 0$$

を満たす．これを積分すると，

$$r^{d-1}\frac{dw}{dr}(r) = K, \quad u(\boldsymbol{x}) = w(r) = \frac{K_1}{r^{d-2}} + K_2 \quad (K, K_1, K_2 \text{は定数})$$

となる．ここで，境界条件 $\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) = 0$ より，$K_2 = 0$ である．

また，$V = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| < 1\}$, $\boldsymbol{F} = \nabla u$ に対して，発散定理を用いると，

$$-1 = -\int_V d^d x \prod_{a=1}^{d} \delta(x_a) = \int_V d^d x\, \nabla \cdot \nabla u = \int_{\partial V} dS\, \boldsymbol{n} \cdot \nabla u$$

となる．ここで，

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{r}\frac{dw}{dr}(r) = \frac{\boldsymbol{x}}{r}\frac{K_1(2-d)}{r^{d-1}}$$

であり，$\partial V = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = 1\}$ 上の外向き単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}$ だから，

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} dS\, \boldsymbol{n} \cdot \nabla u &= \int_{\partial V} dS\, \frac{K_1(2-d)}{r^{d-1}} = -K_1(d-2)\int_{\partial V} dS \\ &= -\frac{2\pi^{d/2} K_1(d-2)}{\Gamma(d/2)}.\end{aligned}$$

よって，$K_1 = \dfrac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}(d-2)}$ であり，求める解は

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}(d-2)|\boldsymbol{x}|^{d-2}}$$

となる．

解答終わり

17.4 最後に

2年に亘った連載も今回が最終回である．お付き合いいただいた読者に感謝申し上げる．大学で教えられる数学の範囲は広く，著者らの力不足のため，取り上げられなかったテーマも多い．また，問題の選択は著者らの好みに依る偏りがあったことをお断りしておく．

この連載の目的はタイトルに掲げた通りである．第1回に述べたように，理工系の大学院入学試験に出題された数学の問題を題材として，それを実際に解きつつ，大学の数学をより深く理解していただくことを第1の目標としてきた．いわゆる受験参考書を否定するつもりはないが，それを目指したわけではない．

最後に，連載で使用させていただいた大学院入試問題の出題委員の先生方に敬意と謝意を表しておきたい．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

微分方程式を考える

第3回

数学は現象をいかに記述しているか

ニュートン力学の基礎的枠組み

小澤 徹

ガリレイ時空における時間と空間の分離を定式化し，ニュートン力学における時間変数の物理学的基礎を明確化する．ニュートンの運動方程式は時間変数について二階の形で表されるが，配位空間の二重接バンドルの枠組みの中で加速度に両立する二階のベクトル場として力の場を規定することにより，ニュートンの運動方程式が質量定数を除いて自然に導かれる事情を説明し，ニュートン力学の基礎付けを常微分方程式の初期値問題の一般論で捉える枠組みを設定する．

3.1 ガリレイ時空：時間と空間の分離

実ベクトル空間 W を基準ベクトルとするアフィン空間 Y が**ガリレイ時空** (Galilean space-time) であるとは，零でない線型形式 $T : W \to \mathbb{R}$ が存在し，W の部分空間 $\mathrm{Ker}\, T$ 自身が $\{0\}$ でないノルム空間であることと**定義する**．Y の点を**事象** (event) といい T を**時間間隔**という．事象 p と q とが**同時**であるとは p と q との差 $q-p$ の時間間隔が 0 であること，即ち $q-p \in \mathrm{Ker}\, T$ であることと定義する．事象 $p \in Y$ に対し同時事象の全体を Y_p と表す：

$$Y_p = \{q \in Y ; q-p \in \mathrm{Ker}\, T\} = \{q \in Y ; T(q-p) = 0\}.$$

ノルム空間 $\mathrm{Ker}\, T$ を V と表しそのノルムを $\|\cdot\|$ と表そう．事象 $p \in Y$ に対する同時事象の空間 Y_p において

$$d_p(q,r) = \|q-r\|, \quad q,r \in Y_p$$

と置くと写像 $d_p : Y_p \times Y_p \to \mathbb{R}$ が定まる．Y_p は $V = \mathrm{Ker}\, T$ を基準ベクトル空間とする Y の部分アフィン空間であり d_p は Y_p の平行移動に関して不変な距離である．$T : W \to \mathbb{R}$ は零でないので $\mathrm{Ker}\, T \subsetneq W$ となる．$v_0 \in W \setminus \mathrm{Ker}\, T$ なる元を取ると $T(v_0) \neq 0$ かつ $v_0 \neq 0$ である．写像

$$\varphi : \mathbb{R} \times V \ni (t, v) \mapsto v + tv_0 \in W$$

は積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times V$ からベクトル空間 W への線型写像であり $w \in W$ に対し

$$\psi(w) = \left(\frac{T(w)}{T(v_0)},\ w - \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

と置いて得られる線型写像 $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ は $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times V}$ を満たすので $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ は線型同型を与える．W の任意の元 w は

$$w = \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 + \left(w - \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

のように，線型形式としての時間間隔 T によって，時間成分 $T(w)/T(v_0)$ と空間成分 $w - (T(w)/T(v_0))v_0$ とに分解される．この分解は v_0 の取り方にのみ依存し，一意的である．$\dim_{\mathbb{R}}(W/V) = 1$ なので v_0 の取り方には定数倍の任意性があり，その定数倍は時間のスケールに対応する．スケールの規格化には $\|v_0\| = 1$ なる v_0 を用いれば良いが，それでも正負 $\pm v_0$ の不定性は残る．正負をどちらか一方に定めることは時間の向きを定めることに相当する．線型同型写像 $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ を $v_0 \in W \setminus V$ に伴う**時空表示**，W の一意的直和分解

$$W = \mathrm{Span}\ v_0 \oplus V$$

を基準ベクトル空間 W の $v_0 \in W \setminus V$ も伴う**時空分解**という．ガリレイ時空の一点 $p \in Y$ に対し，一次元ベクトル空間 $\mathrm{Span}\ v_0$ を基準ベクトル空間に持つ Y の部分アフィン空間 $p + \mathrm{Span}\ v_0$ および V を基準ベクトルとする Y の部分アフィン空間 $V_p = p + V$ が定まる．前者を**時間軸**（time axis），後者を**配位空間**（configuration space）と呼び X と表すことにしよう．以上によりガリレイ時空 Y は時間軸 $p + \mathrm{Span}\ v_0$ と配位空間 $X = p + V$ との積アフィン空間とアフィン同型となる．

3.2 ガリレイ変換とその構造

定義 3.1　ガリレイ時空 Y 内の写像 $g : Y \to Y$ は次の 3 つの条件を満たすとき**ガリレイ変換**であるという．

(G1)　(**アフィン同型**) $A_g \in GL(W)$ が存在し任意の $p, q \in Y$ に対し $g(p) - g(q) = A_g(p - q)$.

(G2)　(**時間間隔の保存**) 任意の $p, q \in Y$ に対し $T(g(p) - g(q)) = T(p - q)$.

(G3)　(**同時事象間の距離の保存**) 任意の $p \in Y$ に対し $g(Y_p) \subset Y_{g(p)}$ かつ $d_{g(p)} \circ (g \times g) = d_p$，即ち任意の $q, r \in Y_p$ に対し

$$d_{g(p)}(g(q), g(r)) = \|g(q) - g(r)\| = \|q - r\| = d_p(q, r).$$

写像 $g : Y \to Y$ がガリレイ変換であるとき (G3) の条件 $g(Y_p) \subset Y_{g(p)}$ は $g(Y_p) = Y_{g(p)}$ に強められる．また，(G1) の $A_g \in GL(W)$ は g に対して一意的に定まる．次の 2 つの定理は基本的である．

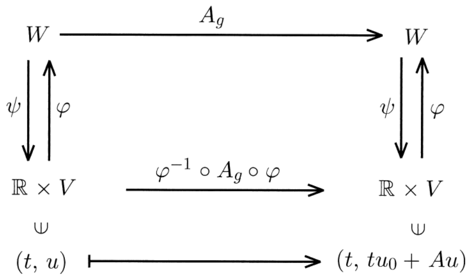


図 3.1

定理 3.1（ガリレイ変換の構造定理）　基準ベクトル空間を W とするガリレイ時空 Y において $v_0 \in W \setminus V$ を一つ固定し対応する時空表示を $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ とする．このとき Y 内の任意のガリレイ変換 $g : Y \to Y$ に対し $u_0 \in V$ および線型同型等長写像 $A : V \to V$ が唯一つ定まり任意の $(t, u) \in \mathbb{R} \times V$ に対し

$$(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) = (t, tu_0 + Au)$$

が成り立つ（図 3.1）．

註　u_0 はガリレイ変換における等速度運動の定速度ベクトルに対応し，空間 V のノルムが内積から導かれる場合には A は広義回転（直交変換）に対応する．

（証明）　積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times V$ において自然に定まる射影 $\pi_1 : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$ および $\pi_2 : \mathbb{R} \times V \to V$ をそれぞれ $\pi_1(t, u) = t$ および $\pi_2(t, u) = u$ で定め，自然に定まる埋め込み $\iota_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times V$ および $\iota_2 : V \to \mathbb{R} \times V$ をそれぞれ $\iota_1(t) = (t, 0)$ および $\iota_2(u) = (0, u)$ で定める．さて $\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R} \times V$ は線型であるから任意の $(t, u) \in \mathbb{R} \times V$ に対し

$$(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) = t(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) + (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(0, u)$$

となる．そこで

$$\begin{aligned}
a &= (\pi_1 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) \in \mathbb{R}, \\
u_0 &= (\pi_2 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) \in V, \\
l &= \pi_1 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi \circ \iota_2 : V \to \mathbb{R}, \\
A &= \pi_2 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi \circ \iota_2 : V \to V
\end{aligned}$$

と置く．このとき $a = 1$, $l = 0$ であることが確かめられる．A の一意性には $t \neq 0$ と $t = 0$ の場合に分けて議論すれば良い．

定理 3.2　ガリレイ時空 Y におけるガリレイ変換の全体を $G(Y)$ とすると写像の合成について $G(Y)$ は群をなす．

3.3 ガリレイ時空の直積表示

ガリレイ時空 Y の中に一点 p を取り固定する．点 p に関する X の点の位

置ベクトルの全体 $W_p = \{(p, q-p); q \in Y\}$ は，Y の基準ベクトル空間 W と線型同型写像 $\pi_p : (p, v) \mapsto v$ で同一視される．π_p によってベクトル空間 W の原点と点 $p \in Y$ とが同一視され，ガリレイ時空 Y の点 $q = p + v$ は W の点 v によって記述される．時間のスケールおよび向きを与える $v_0 \in W \setminus V$ を一つ取り固定する．線型同型写像 $\varphi_{v_0} : \mathbb{R} \times V \ni (t, u) \mapsto u + tv_0 \in W$ によって基準ベクトル空間 W は直積空間 $\mathbb{R} \times V$ と同一視される．π_p と φ_{v_0} によってガリレイ時空 Y の点は直積空間 $\mathbb{R} \times V$ の点によって記述される．

逆に一つのノルム空間 E が与えられたとき積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times E$ をアフィン空間とみなしてガリレイ時空 $\mathbb{R} \times E$ を定義することができる．このとき（自然な）時間間隔 T は $T : \mathbb{R} \times E \ni (t, x) \mapsto t \in \mathbb{R}$ で与えられ $\mathrm{Ker}\, T = E \times \{0\}$ なる関係が従う．時間のスケールおよび（正の）向きを与える $v_0 \in (\mathbb{R} \times E) \setminus V$ は $(1, 0) \in \mathbb{R} \times E$ である．

そこで，この節では前節までのガリレイ時空 Y の議論を時間変数のなす $\mathbb{R}$ と空間変数のなすノルム空間 E との直積空間 $\mathbb{R} \times E$ に対して捉え直してみることにしよう．まず，2 つの事象 (t, x) と (s, y) とが同時であるとは $t = s$ であることにほかならない．よって同時事象の空間は時刻 $t \in \mathbb{R}$ によって特徴付けることができ

$$E_t = \{t\} \times E = \{(t, x); x \in E\}$$

で与えられる．同時事象空間 E_t の任意の二点 $q = (t, x), r = (t, y)$ の距離は

$$d_t(q, r) = \|x - y\|$$

で与えられる．

また，写像 $g : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times E$ が**ガリレイ変換**であるとは次の 3 つの条件が成り立つことと言い換えられる：

(G1)′ $(s_g, y_g) \in \mathbb{R} \times E$ と $A_g \in GL(\mathbb{R} \times E)$ が存在し，任意の $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ に対し $g(t, x) = (s_g, y_g) + A_g(t, x)$.

(G2)′ 任意の $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times E$ に対し $T(g(t, x) - g(s, y)) = T((t, x) - (s, y)) = T(t - s, x - y) = t - s$.

(G3)′ 任意の $t \in \mathbb{R}$ および任意の $(t, x), (t, y) \in E_t$ に対し $t' \in \mathbb{R}$ が存在し $g(t, x), g(t, y) \in E_{t'}$ であり $g(t, x) = (t', x'), g(t, y) = (t', y')$ と表したとき $\|x' - y'\| = \|x - y\|$.

ガリレイ変換の例を挙げよう：

例 3.1（時空並進） $(s, y) \in \mathbb{R} \times E$ に対し $g_{s,y} : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times E$ が $g_{s,y}(t, x) = (t + s, x + y)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり，一つのガリレイ変換となる．

例 3.2（等速度運動） $v \in E$ に対し $g_v : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times E$ が $g_v(t, x) = (t, x + tv)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり，一つのガリレイ変換となる．

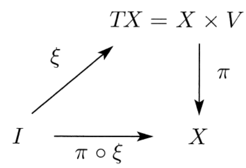


図 3.2

例 3.3（**全単射等長変換**）　全単射等長変換 $A : E \to E$ に対し $g_A : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times E$ が $g_A(t,x) = (t, Ax), (t,x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり，一つのガリレイ変換となる．

ガリレイ変換の構造定理（定理 3.1）は，直積時空 $\mathbb{R} \times E$ における任意のガリレイ変換 g は $v \in E$, $(s,y) \in \mathbb{R} \times E, A \in \mathrm{Iso}(E)$ によって

$$g = g_v \circ g_{s,y} \circ g_A$$

と一意的に表示されることを示している．ここに $\mathrm{Iso}(E)$ は E 上の全単射等長変換のなす変換群とする．

3.4 相空間

実ノルム空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間 X を配位空間と位置付ける設定であれば，その接バンドル $TX = X \times V$ は**相空間**（phase space）と呼ぶのが相応しい．配位空間の点 $x \in X$ に対し x における接空間 $T_xX = \{(x,v); v \in V\}$ には，和とスカラー倍が

$$(x,u) + (x,v) = (x, u+v), \quad (x,u),(x,v) \in T_xX,$$
$$a(x,u) = (x, \lambda u), \quad a \in \mathbb{R}, (x,u) \in T_xX$$

で定まり T_xX は実ベクトル空間をなす．接バンドル $TX = \bigcup_{x \in X} T_xX = X \times V$ から X への射影 $\pi : TX \to X$ が $\pi(x,v) = x$ で定まる．$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし $\xi : I \to TX$ を時間変数 $t \in I$ による相空間内の運動を表すものとし $\xi(t) = (x(t), v(t)) \in X \times V$ と置く（図 3.2）．X はアフィン空間であるから $x'(t) = \lim_{h \to 0} h^{-1}(x(t+h) - x(t))$ は V の元であり $\xi'(t) = (x'(t), v'(t))$ は $V \times V$ の元となる．

定義より，配位空間内の運動は I から X への写像として $x = \pi \circ \xi$ で記述される．写像 $\pi : TX \to X$ の接写像 $T\pi : TTX \to TX$ が $(T\pi)((x,u),(v,w)) = (\pi(x,u), (\pi'(x,u))(v,w))$ で定義される．ここに TTX は X の二重接バンドル即ち TX の接バンドルであり $TTX = (TX) \times (V \times V) = (X \times V) \times (V \times V)$ と表示される．また π の (x,u) での微分 $\pi'(x,u)$ は基準ベクトル空間を $V \times V$ とするアフィン空間 TX において定義されるものとする．$(x,u) \in X \times V, (v,w) \in V \times V$ に対し $T\pi$ は

$$(T\pi)((x,u),(v,w)) = (x,v)$$

と計算される．TTX から TX および $V \times V$ への射影をそれぞれ $\tilde{\pi}$ および

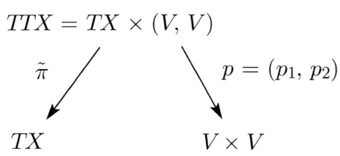


図 3.3

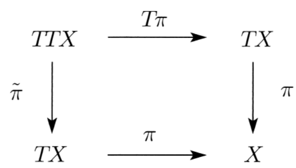


図 3.4

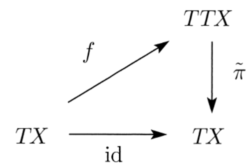


図 3.5

$p = (p_1, p_2)$ と表すことにすれば（図 3.3）

$$T\pi = (\pi \circ \tilde{\pi}, (\pi' \circ \tilde{\pi}) \cdot p) = (\pi \circ \tilde{\pi}, p_1) : TTX \to TX$$

が成り立つ（図 3.4）．

3.5 二階のベクトル場

この節では V はバナッハ空間であるとしバナッハ空間における微分積分法は自由に用いる．f を TX 上のベクトル場とする．即ち f は TX から TTX への写像で $\tilde{\pi} \circ f = \mathrm{id}$ を満たすものとする（図 3.5）．TX 上のベクトル場 f は $T\pi \circ f = \mathrm{id}_{TX}$ を満たすとき**二階のベクトル場**という．

定理 3.3 TX 上のベクトル場 f に対し次は同値である：

(1) f は二階のベクトル場である．

(2) $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は

$$\xi = (\pi \circ \xi, (\pi \circ \xi)') : I \to X \times V = TX$$

を満たす．

(3) 任意の $(x, v) \in TX$ に対し次の等式が成り立つ：

$$(p \circ f)(x, v) = (v, (p_2 \circ f)(x, v)) \in V \times V.$$

(4) $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $t \in I$ に対し $\xi(t) = (x(t), v(t))$ と表したとき次の等式を満たす：

$$\xi'(t) = (x'(t), v'(t)) = (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t))).$$

（証明） (1) $\Longrightarrow$ (2)：$p \circ f$ の積分曲線 $\xi : I \to TX$ に対し

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= (T\pi \circ f)(\xi(t)) = T\pi(f(\xi(t))) \\
&= ((\pi \circ \tilde{\pi})(f(\xi(t))), (\pi' \circ \tilde{\pi})(f(\xi(t)))p(f(\xi(t)))) \\
&= (\pi((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))), \pi'((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t)))(p \circ f)(\xi(t))) \\
&= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))(p \circ f)(\xi(t))) \\
&= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))\xi'(t)) = ((\pi \circ \xi)(t), (\pi \circ \xi)'(t))
\end{aligned}$$

となるから (2) が従う．

(2) $\Longrightarrow$ (1)：任意に $(x, v) \in TX$ を取る．さらに $0 \in I$ なる区間 $I \subset \mathbb{R}$ および $\xi : I \to TX$ が存在して

$$\begin{cases} \xi'(t) = (p \circ f)(\xi(t)), & t \in I, \\ \xi(0) = (x, v) \end{cases}$$

を満たすとする．このとき

$$\begin{aligned}(T\pi \circ f)(\xi(t)) =&(\pi((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))), \pi'((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))))(p \circ f)(\xi(t))) \\ =&(\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))(p \circ f)(\xi(t))) \\ =&(\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))\xi'(t)) = ((\pi \circ \xi)(t), (\pi \circ \xi)'(t))\end{aligned}$$

であり (2) の仮定より最右辺は $\xi(t)$ に等しい．$t = 0$ とすると (1) が従う．

(1) $\Longleftrightarrow$ (3)：任意の $(x, v) \in TX$ に対し

$$\begin{aligned}&(T\pi \circ f)(x, v) = T\pi(f(x, v)) \\ =& ((\pi \circ \tilde{\pi})(f(x, v)), p_1(f(x, v))) \\ =& (\pi((\tilde{\pi} \circ f)(x, v)), p_1(f(x, v))) = (x, (p_1 \circ f)(x, v))\end{aligned}$$

が成り立つから

$$T\pi \circ f = \mathrm{id}_{TX} \Longleftrightarrow v = (p_1 \circ f)(x, v).$$

(3) $\Longrightarrow$ (4)：$p \circ f$ の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $t \in I$ に対し

$$\begin{aligned}(x'(t), v'(t)) = \xi'(t) = &(p \circ f)(\xi(t)) \\ &= (v(t), (p_2 \circ f)(\xi(t))) = (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t)))\end{aligned}$$

を満たすので (4) が従う．

(4) $\Longrightarrow$ (3)：任意の $(x, v) \in X$ に対し $0 \in I$ なる区間 $I \subset \mathbb{R}$ および $\xi : I \to TX$ が存在して

$$\begin{cases} \xi'(t) = (p \circ f)(\xi(t)), & t \in I, \\ \xi(0) = (x, v) \end{cases}$$

を満たすとする．このとき (4) により

$$(p \circ f)(\xi(t)) = \xi'(t) = (v(t), (p_2 \circ f)(\xi(t)))$$

が従うので，$t = 0$ とすると (3) が得られる．

3.6 ニュートン力学の基礎的枠組み

ガリレイ時空を時間軸と配位空間の積アフィン空間に分解する．配位空間 X は実バナッハ空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間とする．質点は固有の質量 $m > 0$ を持ち，その位置は配位空間の点で表される．質点の運動は，時間軸の基準ベクトル空間である $\mathbb{R}$ の区間 I で定義された写像 $x : I \ni t \mapsto x(t) \in X$ で記述される．その速度は $v : I \ni t \mapsto x'(t) \in V$ で記述される．質点の**状態**は相空間 TX で $I \ni t \mapsto (x(t), x'(t)) \in TX$ により記述される．**力の場**とは相空間 TX 上の二階のベクトル場 $f : TX \to TTX$ である

と定義する．与えられた力の場 $f : TX \to TTX$ に対し $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $\xi(t) = (x(t), v(t)) \in TX$ $(t \in I)$ なる表示では，$V \times V$ において

$$\xi'(t) = (x'(t), v'(t)) = (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t)))$$

を満たす．特に V において

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ x''(t) = v'(t) = (p_2 \circ f)(x(t), v(t)) \end{cases}$$

を満たす．この方程式は，単位質量を持つ質点の運動を支配するものと理解される．質量 m を持つ質点は時刻 t での状態 $(x(t), x'(t)) \in TX$ において力の場 f の影響により，加速度 $\frac{1}{m}(p_2 \circ f)(x(t), x'(t))$ を持つというのがニュートンの運動の第 2 法則である．即ち質量 m を持つ質点の状態 $(x(t), x'(t))$ はニュートンの運動方程式

$$mx''(t) = F(x(t), x'(t))$$

に従って記述される．ここに $F = p_2 \circ f$ である．単位質量に対する質量比 m は，力の作用・反作用の法則を通じて運動学的に決定される．即ち，作用・反作用の法則に従って力を及ぼし合っている 2 つの質点の加速度の大きさの逆比が質量比を与える．

以上の基礎的枠組みは，時空が直積 $\mathbb{R}\times X$ に分解されているという設定では，X がバナッハ多様体である場合に自然に拡張される．一方，第3.3節のようにガリレイ時空 Y を π_p と φ_{v_0} とによって直積空間 $\mathbb{R}\times V$ と同一視し，$x(t) \in X = p+V$ を $x(t)-p \in V$ と同一視し，$F : TX \to V$ を $V\times V \ni (x, v) \mapsto F(x+p, v) \in V$ と同一視すれば，ニュートンの運動方程式はすべて一つのベクトル空間 V を用いて理解することができる．その場合，直積空間 $V \times V$ におけるニュートンの運動方程式は $u(t) = (x(t), x'(t)), f(u(t)) = (x(t), \frac{1}{m}F(u(t)))$ として一階の方程式

$$u'(t) = f(u(t))$$

の形に書くことができる．

参考文献

1) R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, "Manifolds, Tensor Analysis, and Applications", Second Edition, Springer, 1988.
2) V.I. Aronl'd, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Second Edition, Springer, 1989.
3) S. Lang, "Differential Manifolds", Addison-Wesley, 1972.
4) 新井朝雄，『物理現象の数学的諸原理』，共立出版，2003.
5) 新井朝雄，『物理の中の対称性』，日本評論社，2008.
6) 並木美喜雄，『解析力学』，丸善出版，1991.

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

リレー連載
フィールズ賞で語る現代数学
第2回

"コーエンの強制法" と強制法[*1)]

渕 野 昌

1. 研究進展の試金石としての未解決問題

数学では，大きな未解決問題がその研究領域での何世代にもわたる研究の進展の試金石のようなものとして機能することは稀ではない．フェルマーの予想が数論に対して果してきた役割はそのようなものとしても理解できるだろうし，本稿でこれから議論しようとしている連続体仮説の，集合論研究に対して果してきた役割もそうであったし，今もそうであり続けてもいる．

フェルマーの予想は，谷山–志村予想の解決というもっと大きな文脈の中で，1990年代の中頃にワイルズ (Andrew Wiles, 1953 (昭和28)–) によって肯定的に解かれた．一方，連続体仮説については，後で述べるような意味で，この問題がそれによって完全に解決されたとは言えないのだが，コーエン (Paul J. Cohen, 1934 (昭和9)–2007 (平成19)) は，この仮説の数学からの独立性（正しいと仮定しても正しくないと仮定しても矛盾が生じないこと）を1960年代に証明している．コーエンがこの証明のために導入した強制法 (forcing) と呼ばれる手法は，それ以降の集合論研究を，それまでとは決定的に異るものに変えてしまった．

ワイルズはフェルマーの予想（フェルマー–ワイルズの定理）の解決がなされた時点で40才を越えていたため，その成果がフィールズ・メダルの受賞対象にはならなかったが，当時まだ30才台前半だったコーエンは，1966年にモスクワで開催された世界数学者会議で，彼の連続体仮説に関する研究成果に対しフィールズ・メダルを受賞している．

フェルマーの予想は，ディオファントスの『数論』の欄外にフェルマー (Pierre de Fermat, 1601 (慶長6)–1665 (寛文5)) が記した書き込みの逸話や，多くの人が証明を試みて挫折したことなどから大変に有名にはなっていたが，その命題自身には，それほど深い意味があるようには思えない．それにもかかわらず，この命題の解決にむけての様々な試みから直接的間接的に派生した，あるいはそれらの試みから触発されて生れた数学理論は近代，現代の数学を大きく進歩させてきたと言えるだろう[*2)]．

一方，連続体仮説は，次の第2節で見るように，数学の基礎に関する根本問題の一つであるように思える．この違いは，たとえば，連続体仮説がヒル

---

*1) 本稿の原稿に対して，松原洋（名古屋大学)，薄葉季路（神戸大学）両氏から，有用なコメントや誤植の指摘をいただいた．ここに感謝の意を表す．

*2) 数論の歴史の中での，フェルマーの定理の役割に関する一般向けの日本語で書かれた解説の一つとして，1) があげられる．

ベルトの23の問題に第1問題としてあげられているのに対し，フェルマーの定理はこの問題のリストに含まれてもいないことにも象徴されていると言えるだろう．しかし，まさにこのことが，コーエンによる連続体仮説の“解決”の真に意味するところを見えにくくしている原因の一つになっているようにも思える．つまり，彼の連続体仮説の研究が強制法という革新的な手法の集合論への導入を惹き起こした，という事実や，この「解決」は実は最終的な解決ではなく，より深淵な興味深い問題がその後さらに研究されつつある，という事実を，この「非常に重要な問題の“解決”」という見掛けが不当に隠蔽してしまっているように思えるのである．これについては，後の第4節と第5節でさらに詳しく述べる．

2. 連続体仮説と集合論

集合論は，代数，幾何，数論などに比べて非常に若い研究分野である*3)．これらの古典的な数学の研究分野の始まりが幾千年もの人類の文明の歴史の過去のかなたにかすんでいるのに対し，集合論は，カントル（Georg Cantor, 1845（弘化2)–1918（大正7)）のフーリエ解析の研究が契機となって，19世紀の後半に創造された数学の研究分野である*4)．

カントルが集合論の研究の初期に頻繁に自分の研究の進展をデデキント（Richard Dedekind, 1831（文政13)–1916（大正5)）に書き送っていたことから，無限の研究としての集合論が独立した数学の研究分野として生れた日の日付が特定できる：1873（明治6）年の12月7日にカントルは実数の全体 $\mathbb{R}$ を自然数の全体 $\mathbb{N}$ で数え上げることができないこと（つまり，実数の全体を $\mathbb{R}=\{a_i : i\in\mathbb{N}\}$ と表現できないこと）を証明して，その翌日にこの証明をデデキントに書き送っているのだ．自然数の全体はもちろん実数の全体の部分集合である（特に実数の全体に1-1に埋め込める）から，このことは，実数の全体の無限のサイズ（濃度）が自然数の全体のそれより真に大きい（実数の全体は可算でない）ことを示していると解釈できる．

カントルは，その後の研究で，すべての無限集合 X に対し，その集合より濃度が大きな集合が存在することを示している（X の冪集合 $\mathcal{P}(X)=\{y : y\subseteq X\}$ がそのようなものの一つになる）．また，彼は，多くの集合について，その濃度（集合のサイズ）が非可算なら（つまり可算でないなら）連続体濃度（実数の全体と1-1 ontoに対応がつけられること）であることを示している．たとえば閉集合についてそれが言える（この証明には可算でない閉集合 $C\subseteq\mathbb{R}$ が与えられたとき超限帰納法を用いて C から順次孤立点を取り除いてゆくことで，最終的に C の空でない部分集合で完全集合になっているものが残ることを示すことでなされる．空でない完全集合は連続体濃度を持つことが示せるので，このことから C も連続体濃度を持つことがカントル–ベルンシュタインの定理から帰結できる)．またカントルは $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^\omega$（無限実数列の全体）がすべて連続体濃度になることを示している．$\mathbb{R}^n$ の閉部分集合や開部分集合についても上と同じことが言える．また，これはカントルより後の時代の研究だが，すべての解析集合（ボレル集合の射影として表せるような集合）も非可算なら，連続体濃度を持つことがスースリン（Mikhail Suslin, 1894（明治27)–1919（大正8)）によって示されている．特に，すべてのボレル集合は非可算なら連続体濃度である．

カントルは上で述べたような完全集合の構成で用いられた超限帰納法についての考察をさらに進めて（超限）順序数の理論を確立している．順序数の理論と上で述べた無限集合 X の冪集合が X より真に大きな濃度を持つことを組み合わせると（実際にはこの議論では更に選択公理も必要になるのだが)，無限集合の濃度が順序数によって小さい方から整列されることが示せる．カントルはそのように整列された無限集合の濃度をヘブライ語の

*3) もう少し後出の数学の研究分野である（近代的な）解析学との比較でも，集合論の始まりは200年近くの時差がある．
*4) 以下で述べている集合論の歴史に関する私の認識は，A. Kanamori による 8∼10) に負うところもある．

アルファベットの最初の文字 ‘ℵ’（アレフ）を用いて $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$ と表した．$\aleph_0$ は可算集合の濃度で，$\aleph_1$ はその次に大きな濃度，…，$\aleph_\omega$ は $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ の極限の濃度である．

実数の全体の集合の濃度（これは連続体濃度と呼ばれ連続体（the continuum）の頭文字をとって $\mathfrak{c}$ で表されることが多い）がこの基数の列の中のどれになるのか，というのは自然な疑問である．閉集合やもっと一般的な解析集合に関する上で述べた結果から，実は可算濃度と連続体濃度の間には基数が存在しないのではないか，とも思える．カントルは多分そのような直観から，$\mathfrak{c} = \aleph_1$ であることを予想した．カントル自身はこれをまだ証明されていない定理と固く信じ，„das Kontinuumproblem“（連続体問題）と呼んで生涯その証明に全力をかたむけた．等式 $\mathfrak{c} = \aleph_1$ はその後，連続体仮説（„die Kontinuumhypothese“, 英語では the Continuum Hypothesis（略して CH））と呼ばれるようになった．ヒルベルト（David Hilbert, 1862（文久2)–1943（昭和18））が1900年のパリで開かれた世界数学者会議での講演で，この問題を彼の23の数学の未解決問題のリストのうちの最初の問題として取り上げたことは既に本稿の初めでも述べた*5)．

濃度 κ の集合の冪集合の濃度を 2^κ で表すことにする．$\mathbb{R}$ と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は等濃度になることが容易に示せる（各 $r \in [0,1]$ に r の二進表示に対応する $\mathbb{N}$ の部分集合を対応させる写像はほとんど 1-1 onto である．$[0,1]$ と $\mathbb{R}$ の間には容易に 1-1 onto 写像を定義することができる）ので，$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ である．したがって，連続体仮説は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と表すことができるが，これを一般化した，「すべての順序数 α に対し $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ が成り立つ」，という主張は一般連続体仮説（Generalized Continuum Hypothesis（GCH））と呼ばれているハウスドルフ（Felix Hausdorff, 1869（明治2)–1942（昭和17））によって定式化された仮説である．

1900年代から1930年代にかけては様々な集合論の公理化の試みがなされることになった．世紀末から20世紀初頭にかけてラッセルのパラドックスをはじめとして，集合の構成原理の適応範囲をとり違えることで矛盾が容易に導かれてしまいうることが明かになったことが集合論の公理化を促したのだった．ただし，カントルは集合論で何が許容範囲内の議論なのかということに対する正しい直観を持っており，彼の研究結果は公理化された集合論の体系の中で再構成されることになった*6)．集合論の公理化の研究を進めたのはツェルメロ（Ernst Zermelo, 1871（明治4)–1953年（昭和28）），フレンケル（Adolf Fraenkel, 1891（明治24)–1965（昭和40）），フォン・ノイマン（John von Neumann, 1903（明治36)–1957（昭和32）），ベルナイス（Paul Bernays, 1888（明治21)–1977（昭和52）），スコーレム（Thoralf Skolem, 1887（明治20)–1963（昭和38））といった人達だったが，彼等の多くは，この研究で確立された集合論の公理系が無矛盾で完全であることがやがて証明できることを確信していたようである．このことは彼等の論文に散見されるコメントから読みとることができる（ただし上にあげた人々のうちスコーレムは他の人達より集合論の完全性や無矛盾性に

*5) 集合論の研究が主にドイツ語圏でなされていた20世紀前半には，可算を表すドイツ語 abzählbar の頭文字をとって $\mathfrak{a}$ で可算濃度を表すことが多かったので，「俺は可算濃度と連続体濃度の間にあるのが何か知っているぜ．$\mathfrak{b}$ だよ.」というインサイダージョークが成立していた．奇しくも，20世紀の終り頃からは $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は連続体の集合論的構造の不変量として知られている基数のうちの二つを表す記号として用いられるようになっている．$\mathfrak{a}$ は almost disjoint number と呼ばれ，互いの共通部分が有限になっているような自然数の無限集合の族でこの性質に関して極大なものの濃度のうち最小のものを表し，$\mathfrak{b}$ は自然数から自然数への関数の族で，その族に属す関数のすべてがある一つの関数によってほとんど pointwise に（有限個の点をのぞいて pointwise に）に上から抑えられてはいないようなものの濃度のうちの最小のものを表す．このとき，$\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ となることはすぐに分るので，連続体仮説の下では $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ であるが，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ も集合論と矛盾しないことがシェラハ（Saharon Shelah, 1945（昭和20)–）の2004年に発表された論文で証明されている．

*6) カントルの集合論（言わゆる素朴集合論）はラッセルのパラドックスなどにより矛盾する間違った理論であることが判明した，というような一部の論者の間に広まっている認識は，この意味で間違っている（あるいは少なくとも misleading である）と言えるだろう．ことに対する注意は 6, 7) などで既に述べている．

対して懐疑的だったようだが).

しかし，そのような証明が原理的に不可能であることが，1931 年に発表されたゲーデル（Kurt Gödel, 1906（明治 39)–1978（昭和 53)）による次の結果で判明してしまう[*7].

定理 1（ゲーデル–ロッサーの第一不完全性定理）． T を初等数論（ペアノ算術の十分に大きな部分）を含む具体的に与えられた公理系とするとき，T が無矛盾なら，T から証明できないし，その否定も証明できないような(つまり T から独立な)，T の言語での文 φ が必ず存在する. □

定理 2（ゲーデルの第二不完全性定理）． T を定理 1 でのような公理系とするとき，T が無矛盾なら，T の無矛盾性を主張する（算術の言語での）論理式 $consis_T$ は証明できない. □

集合論の公理系やその (具体的に与えられた) 拡張はすべて上の T の条件を満たすので，それが無矛盾なら完全でない（それから独立な命題が存在する）し，その無矛盾性を証明する数学的な手立ては全くない（集合論はすべての数学を包含していると考えられるので，そこで証明できなければ，他に数学的に証明することは不可能である).

ちなみに，不完全性定理は，実際には，証明の有限的な操作に関する確定的な議論のみを問題とする世界での主張である．たとえば，第二不完全性定理については，「もし T の無矛盾性を表明する（具体的に定義されている特定の）の論理式 “$consis_T$” の T からの証明 P が与えられたとすれば，… というやり方で P を変形することで，T からの矛盾の証明が得られる」という表明が示されていることが，第二不完全性定理の証明の分析から分る.

第二不完全性定理は集合論の矛盾を主張するものではもちろんないが，ひょっとしたら数学は矛盾しているかもしれない，という不安を完全に払拭する手立てがないことを示してもいる訳なので，その理由から，特に他の数学理論より無矛盾性の強さ（consistency strength）の大きな[*8]集合論の構成原理をフルに使って数学することを躊躇する人もいる，ということもある意味で納得のゆくことと言えるのかもしれない．特にすぐ後に述べることになるゲーデルの結果やコーエンの結果が得られる前の集合論を，不完全性定理の暗示する不安な状況とはかりにかけたときには，このことは十分に納得できるようにも思える.

一方，第一不完全性定理は，数学での未解決の問題が，もしかしたらどれも数学から独立かもしれない，したがって，普通の数学的なやり方では絶対に証明も反証もできないかもしれない，という可能性を示唆する—ちなみに，数学のある定理が数学から独立であるかいなかを判定する一般的なアルゴリズムも存在しないことが知られている (チャーチの定理)．ゲーデルが 1938 年に発表された彼の一般連続体仮説に関する次の結果を証明したとき，連続体仮説がそのような数学から独立な命題になっているかもしれない，という予測は，彼の頭の中に当然あったはずである：

定理 3（ゲーデル）． 集合論の公理系（から選択公理を除いたもの）が無矛盾なら，この公理系に一般連続体仮説（と選択公理）を加えたものも無矛盾である. □

「集合論の公理系が無矛盾なら」とわざわざ断っているが，第二不完全性定理により，この前提ははずすことができない．定理 3 の証明は，構成可能集合（ごくラフな言い方をすると，超限帰納法を用いて定義可能性の議論を積上げてゆくことで構成できる集合）の全体が集合論の公理と一般連続体仮説のモデルになっていることを示すことでなされる．しかし，この言い方では集合論からの

*7) ロッサー（J. Barkley Rosser, 1907（明治 40)–1989（平成元年)）によるここで述べた形の第一不完全性定理の改良はロッサーの 1936 年の論文で発表されている（ゲーデルのオリジナルな形の第一不完全性定理は理論 T の無矛盾性より強い仮定が必要となっていた).

*8) ある理論の無矛盾性の強さが他の理論より高い，というのは，この理論から他の理論の無矛盾性が証明できる，ということであるが，第二不完全性定理により，これは，言わば，この理論が他の理論より矛盾している可能性が高い，ということでもある.

矛盾が得られたようにも読めてしまう．集合論のモデルの存在から集合論の矛盾性が証明できるから，集合論のモデルの存在が証明できたとすると，第二不完全性定理から，この証明を変形して集合論からの矛盾の証明が得られてしまうはずだからである．これが起こっていないのは，ここでモデルと言っているのがここでは真のクラス（構成可能集合の全体 L）を台集合として，もともとの $\in$ 関係をそこに制限した形のものになっていて，L が集合論と一般連続体仮説のモデルになっている，という主張は，そこでの各（有限的な）証明に対して L がそれを成立させるものになっていることを “集合論の外”（つまり超数学のレベル）で証明しているにすぎないからである．なお，すべての集合が構成可能である可能性もあるので，タルスキーの真理の定義不可能性定理から，ここでの “各（有限的な）証明に対して…” という形の主張は集合論の矛盾が導かれないぎりぎりの線のものになっていることも分る．

ゲーデルのこの定理の証明は，現在の数学のスタンダードから見れば，少なくとも数学的なテクニックに関してはそれほど難しいものではないはずなのだが，そこでの議論は上で見たような数理論理学で得られている知見の微妙な部分と密接に関わりあっているため，数理論理学の基礎的な知識を持っていない人にとって理解が難しいものになっているのではないかと思う．このことは，次に述べるコーエンの結果や，その証明から発展した強制法の理論についてはもっと強く言える．その結果，コーエン以降の集合論は，数理論理学の素養を十分に持っていないことの多い他の分野の数学者から言及されることがほとんどなくなってしまった．後に述べる定理 4 でコーエンはフィールズ・メダルを受賞するのだが，“これが数理論理学の専門家にこの賞が与えられる最初で最後だった”[11)*9)]．数理論理学の研究分野の中には計算機科学との関連をより強く持つものも少なくないが，集合論の周辺では数学的な研究（結果が数学的であるだけでなく，用いられる手法や理論の体系自身も数学的な洗練を示すものになっているような研究）が爆発的な発展を遂げている．コーエン以降，この発展が数学の進歩としてフィールズ・メダル授与という形で一度も認識されていないのは，上で示唆したような種類の数理論理学の知識の前提が障害のため，集合論の研究成果の評価ができる人が他の分野にはほとんどいなくなってしまっていることが，その大きな原因の一つかもしれない．

3. 連続体仮説の独立性証明と強制法

コーエンは 1963（昭和 38）年に次の結果を得ている：

定理 4（コーエン[2,3]）． (a) 集合論の公理系が無矛盾なら，これに連続体仮説の否定を付け加えたものも無矛盾である．(b) 集合論の公理系から選択公理を除いたものが無矛盾なら，これに選択公理の否定を付け加えたものも無矛盾である． ❏

これとゲーデルの結果と合せると，一般連続体仮説と選択公理の，（選択公理を除いた）集合論の公理系上の独立性が示せたことになる．

コーエンの結果も，論理式や公理の体系に関する確定的な操作に関する命題として述べることができる：集合論の公理系と連続体仮説の否定を合せたものからの矛盾の証明が与えられれば，それから集合論の公理系だけからの矛盾の証明を作りだすアルゴリズムが存在する．

コーエンのこの結果の証明は，ゲーデルの定理 3 の証明よりさらに矛盾すれすれのアクロバットを行なっているように見えるものになっている．定理 4 (a) の証明の粗筋は，次のように述べられる：集合論の公理系をツェルメロ−フレンケルの集合論でのそれ（ZF）としてとり，M をその可算で推移的な $\in$-モデルとする[*10)]．ゲーデルの結果

*9) Monastyrsky のこの文章では，今後も与えられることは絶対にない，ということを表明しているように見える断定的な書き方がされている．

*10) M が $\in$-モデルとは，モデルでの要素関係の解釈が本物の要素関係を M に制限したようになっているモデルのことで

（定理 3）により M は選択公理も満たすとしてよい*11)．このとき，M 上の generic-集合と呼ばれる M に含まれない，ある意味で M 上の独立性の高い集合 G をとり，M と G を部分集合として含む集合論（と選択公理）の $\in$-モデルとなっているような最小の集合（M の強制拡大）$M[G]$ が作れるが，これは連続体仮説の否定のモデルにもなっている．

定理 4 (b) の証明は，$M \subseteq N \subseteq M[G]$ となるような ZF のモデル N で選択公理は満たさないようなものをうまくとることでなされる．

上の記述で一番問題になりそうに思えるのは，「M をその（ZF の）可算で推移的な $\in$-モデルとする」というところであろう．そのようなモデルが存在することからは，ZF の無矛盾性を主張する ZF の言語での論理式が ZF の中で証明できてしまうが，第二不完全性定理から，そのことから ZFC が矛盾することが示されてしまうからである．

この問題は，次のようにして回避することができる：任意の ZFC の有限個の公理の集まり Γ を考える．これから無矛盾性を証明するために使うことになる集合論の公理は高々有限個である．それらの有限個の公理と強制拡大がそれらの公理を成り立たせるものになっていることを保証する公理を合せたものを考えてもそれらは高々有限個である．しかも，この「有限個」というのは，集合論の内部の有限の概念によるものであるばかりでなく，集合論の外側の meta mathematics での意味での有限である．それらの有限個の公理を Γ に付け加えたものを Γ' とすると，レヴィの絶対性補題とモストウスキーの崩壊補題から，Γ' を満たすような可算で推移的な $\in$-モデル M が存在することが示せる．この M に対し，$M[G] \models \Gamma + \neg\mathrm{CH}$ となることが示せるが，このことから，$\Gamma + \neg\mathrm{CH}$ は矛盾しないことが示せたことになる（もし $\Gamma + \neg\mathrm{CH}$ が矛盾するなら，ここでの議論と合せると ZFC から矛盾が示せたことになり，仮定に反する）．Γ は任意だったので，このことから ZFC $+ \neg$CH は無矛盾であることが帰結できる．

ただし，今日，強制法を用いるとき，このような，「正しい」記述をすることはまずない．普通に「M を ZFC の可算推移的モデルとする」として議論を始めるか，さらには，集合の全体のユニヴァース V 自身をこの M のようなものとしてとって V の強制拡大について議論をする，という書き方をすることすら少なくないし*12)，そのことの「正しい」読み替えの仕方についてあらためて断ることもない．

4. “コーエンの強制法” と強制法

コーエンが定理 4 (a) の証明を行ったときに彼の導入した強制法は，今日強制法として知られている一般的な手法の特殊例の一つで，今日では彼の名前を冠してコーエン強制（Cohen forcing）と呼ばれるものだった．今日の意味での一般的な強制法は，初期にはコーエン自身も含み，当時コーエンの手法をいちはやく取り入れて新しい結果を次々に得ていったソロベイ（Robert Solovay, 1938（昭和 13）–），レヴィ（Paul Lévy, 1886（明治 19）–1971（昭和 46）），スコット（Dana Scott, 1932（昭和 7）–），シェーンフィールド（Joseph Schoenfield, 1927（昭和 2）–2000（平成 12））といった人たちによって 1970 年代頃までに整備されたものである．

現代的な強制法の理論では，議論の出発点としてとった推移的な集合論の $\in$-モデル（ground model）M の中で最大元を持つ半順序集合 $\mathbb{P}$ をとり，$\mathbb{P}$ の部分集合として generic-集合 G をとって $M[G]$ を構成する．ここで G が（M 上）generic であるとは，(a) G は上方向に閉じていて，(b) G の任意の二つの要素の下には G の要素が共通にあり，(c) M の要素で $\mathbb{P}$ の（下方向に）密な部分集合は常に G と共通の要素を持つ，ということ

ある．集合 X が（$\in$-関係に関して）推移的であるとは，任意の集合 x, y について，$x \in X$ かつ $y \in x$ なら $y \in X$ が成り立つことである．

*11) ZF に選択公理（Axiom of Choice）を加えた体系は ZFC と呼ばれる．

*12) 巨大基数の存在の下で強制法の議論を行なうときに，このような書き方が自然なものになる．

として定義される．特に，ここで最後に述べた性質 (c) は G の M 上の genericity と呼ばれるもので，決定的な役割を果すことになるものである．

$\mathbb{P}$ が無原子的なとき，つまり，ある無原子的なブール代数の正の要素の中の（下方向に）稠密な部分集合に対応するようなものになっているとき，このような G は M の要素にはなり得ないことが簡単に示せる．

集合論の言語で表現のできる命題 φ と $p \in \mathbb{P}$ に対し，"p を要素として含むすべての generic-集合 G に対し，$M[G]$ で φ が成り立つ" という関係（このことを $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "φ" と表す）は M で記述できる (強制定理)．また任意の M 上の generic-集合 $G \subseteq \mathbb{P}$ に対し，$M[G]$ で φ が成り立つなら，$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "φ" となるような $p \in G$ が存在することも示せる．M が可算なら，M の要素になっているような $\mathbb{P}$ の稠密部分集合の全体も可算なので，これらをならべておいて対角線論法を用いて構成することで，$\mathbb{P}$ に関する M 上の generic-集合 G が容易に得られる．M が可算でないとき（たとえば M として本物の集合論のユニヴァースをとるとき）には，このような構成は一般にはもはやできないのだが，このときにも関係 $\Vdash_{\cdot}$ "$\cdot$" は M で定義できるので，generic-集合 G を用いる議論を $\Vdash_{\cdot}$ "$\cdot$" を用いる議論に翻訳しなおすことで，同様の独立性証明の議論が可能になる．

ここで述べたような強制法の現代的な枠組から見たとき，コーエンの導入した強制法は，次のような半順序集合 $\mathbb{C}_\kappa$ に特化したものになっていた：κ を (M での) ある基数として，$\kappa \times \omega$ から $\{0,1\}$ への有限部分関数の全体を $\mathbb{C}_\kappa$ とする*13)．$\mathbb{C}_\kappa$ 上の半順序としては，(関数の) 包含関係の逆を考える．G を M 上 $\mathbb{C}_\kappa$-generic とすると，(b) から，G の要素となっている部分関数は互いに共存可能なものとなっているので，G の関数を全部はりあわせた $\kappa \times \omega$ から $\{0,1\}$ への（部分）関数 $\bigcup G$ が考えられる．さらに (c) により，$\bigcup G$ は実は $\kappa \times \omega$ 全体で定義されたものとなり，$\bigcup G(\alpha, \cdot)$, $\alpha < \kappa$ は互いに異る ω から $\{0,1\}$ への関数となることが分る．一方，$\mathbb{C}_\kappa$ が countable chain condition と呼ばれる性質を持つことから，M の基数はすべて $M[G]$ でも基数になっていることが証明できる．これらのことから，$M[G]$ では，$2^{\aleph_0} \geq \kappa$ が成立していることが分る．

強制法は，コーエンの 1963 年の論文での導入から非常に短い期間の間に，現在に用いられるものとほぼ同じ形の理論にまでに整備されていることに驚かされる．1967 年に UCLA で開催された集合論のシンポジウムのプロシーディングスとして出版された 13) を見ると，ソロベイの実可測基数に関する論文[16]（選択公理を含む集合論の公理の下でルベーグ測度をすべての実数の集合上の σ-加法的測度に拡張できることと，実可測基数の存在の同値性，さらにこれらのことと可測基数の存在との無矛盾等価性が証明されている）や，サックス強制の導入されているサックスの論文[12]，クレパ仮説とチャング仮説についての古典的な結果の証明を与えているシルバーの論文[18] などの歴史的な文献と一緒に，シェーンフィールドの強制法の定式化に関する論文[17] が載っていて，この論文での記述は，既に現在の強制法の理論の展開とほぼ同じ形のものになっていることが認められる．現代の強制法で多用される重要な手法に対応するもので，ここでまだ現れていないのは，このすぐ後にソロベイとテンネンバウム (Stanley Tennenbaum, 1927（昭和 2)–2005（平成 17)）によってその基礎の最初の部分が導入されることになる強制法の超限回繰り返しの理論くらいなものである．

このプロシーディングス[13] にはコーエン自身の論説[5] も含まれているのだが，ここでのコーエンは，集合論の基礎付けについての "哲学的" な，しかも懐疑主義者の視点からの考察のように見えるものに終始していて，強制法の理論の数学としての発展に対しては全く興味を失なっているように見える．この少し前に上梓された 4) ではこの論文で見られるような集合論の研究の進展に対する否定的な姿勢はそれほど見られないので，コーエンのこの数学に対する立場の激変はこの間の時期

*13) 集合論では ω で（0 を含む）自然数の全体に対応する集合を表す．

に起こったものだと思われる．

コーエンはこの後集合論の発展に積極的にコミットすることはなかったようである．コーエンのフィールズ・メダル受賞にもかかわらず，彼の導入した強制法の意義が数学のコミュニティーに広く認識されていないのは，前に書いたように，連続体仮説という重要な問題の解決という点に注目が集まってしまったからでもあろうし，強制法が，その理解に数理論理学の深い理解を必要とするということもあるのだろうが，それ以外にも，唯一のフイールズ・メダルの桂冠集合論研究者コーエンがその後この理論の発展に関して積極的な発言をほとんどしていなかったことも影響しているのかもしれない．

強制法の理論の発展とこの理論による成果に戻ると，上にも何度も名前のあがったソロベイの強制法の導入直後からの活躍が目をひく．コーエンは初め上記のコーエン強制 $\mathbb{C}_\kappa$ による強制拡大での連続体の大きさを確定できないでいたが，ソロベイとコーエンは独立に，κ の（M での）共終数が ω より大きいときには，$M[G]$ で $2^{\aleph_0}=\kappa$ が成り立つことを証明している．また，コーエンは彼の強制法の議論の出発点で $V=L$ の仮定を必要としていたが，ソロベイはこの仮定が落せることを証明して，強制拡大の反復の可能性への道を開いている．15) では，ソロベイは到達不可能基数 κ を持つ M から出発して今日レヴィ崩壊と呼ばれる強制拡大で，κ 未満の順序数をすべて可算なものに“崩壊”させることで $M[G]$ の内部モデルで，弱い選択公理を満たし，「すべての実数の集合がルベーグ可測でベールの性質を持つも」のがとれることを証明した．つまりこの「すべての …」という主張を，弱い選択公理と合せたものは ZF と無矛盾であることを証明している．このモデルは現在ではソロベイモデルと呼ばれていて，コーエン以降の集合論の結果で集合論以外の分野の数学者から引用されることのある数少ない結果の一つになっている．15) や 16) の結果の，数学全般に対するインパクトの大きさから，ソロベイが二人目の集合論でのフィールズ・メダリストになってもおかしくなかったように思えるのだが，そのような流れは起こっていなかったようである．当時は集合論の専門家の中にさえ巨大基数に対して懐疑的な人がいた，ということがソロベイの仕事が十分に評価されなかった原因の一つだったかもしれない．16) での可測基数は，当時の感覚としては矛盾している可能性の高い概念だったかもしれないし，15) では，到達不可能基数の仮定が本当に必要かどうかがまだ判っていなかったために，巨大基数不審のバイアスがかかった視点からは余計に最終的でない結果であるように見えてしまっていたかもしれない．

15) での到達不可能基数の問題は，1980 年代にシェラハによって意外な解決が与えられることになる：「すべての実数の集合がルベーグ可測」の無矛盾性には到達不可能基数が必要だが，「すべての実数の集合がベールの性質を持つ」には到達不可能性基数は必要ない[14)]．

5. 連続体問題

コーエンの結果から連続体仮説は集合論の公理系から独立であることが分ったわけだが，このことは，現在の集合論の公理系 ZFC がまだ拡張を必要としていることを示している，と解釈することもできる．こう解釈する立場からは，そもそも集合論の“正しい”拡張が何かが議論できるのか，が問題となってくるが，巨大基数の理論と強制法の理論は，集合論の公理系の拡張の可能性をさぐるための思考実験の手法と見ることもでき，20 世紀末以降に得られつつある集合論でのそのような思考実験の厖大な成果は，そのような議論の可能性を強く示唆しているし，ウディン（Hugh Woodin, 1955（昭和 30)–）らによる研究は，そのような研究の成果による連続体問題の真の解決が手のとどくところにまで近づいていることを予感させるものですらある．

1980 年代に製作された “Horizon, A Mathematical Mystery Tour” と題された BBC の教育番組の中で，デュドネ（Jean Dieudonné, 1906（明

治39)– 1992(平成4))は，「(連続体仮説の独立性のような結果は）そのような方向で研究をすることが無意味だということを数学者に教えてくれる，という意味で役に立つ」と言っている．しかし，コーエン以降，現在までに得られている，そして現在も得られつつある多く独立性証明を含む21世紀の集合論の成果を背景に数学を眺望するとき，この発言はいかにも皮相的なものとしか思われないのである．

参考文献

1) 足立恒雄,『フェルマーの大定理—整数論の源流』, ちくま学芸文庫 (1996/2006).
2) Paul J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol.**50** (1963), 1143–1148.
3) ____________, The independence of the continuum hypothesis II, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol.**51** (1964), 105–110.
4) ____________, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Books on Mathematics (2008); edition originally published by W.A. Benjamin (1966).
5) ____________, Comments on the foundations of set theory, in 13) (1971), 9–16.
6) 渕野昌, 現代の視点からの数学の基礎付け：in: リヒャルト・デデキント著, 渕野昌翻訳／解説,『数とは何かそして何であるべきか』, ちくま学芸文庫 (2013) に付録Cとして収録.
7) _____, フォン・ノイマンと公理的集合論, 現代思想, 2013年8月増刊号 (2013), 208–223.
8) Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Corrected Second Edition, Springer (2004): 日本語訳：A. カナモリ (著), 渕野昌 (訳):『巨大基数の集合論』, シュプリンガー・ジャパン (1998).
9) ________________, The mathematical developement of set theory from Cantor to Cohen, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol.**2**, No.1 (1996), 1–71.
10) ________________, Cohen and set theory, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol.**14**, No.3 (2008), 351–378.
11) Michael Monastyrsky, Some Trends in Modern Mathematics and the Fields Medal, *CMS Notes*, Vol.**33**, No.2 (2001), 3–5, and Vol.**33**, No.3 (2001), 11–13.
12) Gerald E. Sacks, Forcing with perfect closed sets, in 13) (1971), 331–356.
13) Dana S. Scott (ed.), *Proceedings of Symposia in pure mathematics*, Vol.**XIII**, Axiomatic Set Theory, Part I, (1971).
14) Saharon Shelah, Can you take Solovay's inaccessible away?, *Israel Journal of Mathematics*, **48** (1984), 1–47.
15) Robert M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Mathematics*, vol.**92** (1970), 1–56.
16) ________________, Real-valued measurable cardinals, in 13) (1971), 397–428.
17) J.R. Shoenfield, Unramified forcing, in 13) (1971), 357–382.
18) Jack Silver, The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory, in 13) (1971), 383–390.

(ふちの・さかえ，神戸大学大学院システム情報学研究科)

特　集（2014 年 11 月号予告）

応用するトポロジー

“柔らかい幾何学”がもたらす諸分野の発展

巻頭言	出口　哲生
トポロジーと数学のいろいろな分野との関連	河内　明夫
空間グラフのトポロジー	新國　亮
DNA トポロジー	下川　航也
結び目のエネルギー	今井　淳
流体力学とトポロジー	木村　芳文
トポロジーとゲージ理論	伊藤　克司
高分子とトポロジー	手塚　育志
［コラム］	藤　博之

特　集（2014 年 9 月号）

重力の謎と魅力

身近で謎の多い存在

巻頭言	白水　徹也
アインシュタイン方程式　重力を方程式で記述する	前田　恵一
幾何学からみた重力　直線と潮汐力	石橋　明浩
宇宙論からみた重力	向山　信治
熱・統計力学からみた重力	高柳　匡
量子論からみた重力	細谷　暁夫
素粒子論からみた重力	九後汰一郎
多彩な天体現象と重力	井岡　邦仁
［コラム］宇宙を通じた重力研究の過去，現在，未来	佐藤　勝彦

《連載》例題形式で探求する微積分学の基本定理　その 11	森田　茂之
大学院入試問題からみた大学の数学　その 16	海老原　円 太田　雅人
経路積分と量子解析　その 3	鈴木　増雄

編集後記

複素数・複素平面は高校のときに初めて知り，面白い世界だなと感じました．その後大学で関数論の講義を受け，複素関数・複素解析の威力を体験しました．大体の関数論の教科書に載っているオイラーの公式は今でも興味深い式です．

今回の特集記事を読むと数学の様々なところで複素関数・複素解析の考え方が存在していることがわかります．実数の世界では見えにくかったことが複素数の世界では見やすくなることもあるようです．本特集を機により奥深い世界を探求するのはいかがでしょうか．　　(R)

＊　　＊

物理と数学を切り分けて考えてしまう学生が多いという声を時折大学の先生から伺います．私自身も物理と数学に触れるとき，それぞれがどのようにつながっているのか未だに手探りしながら考えているような状況です．

中村先生の記事にも書かれているように，私も自然界が虚数を含む複素数によって記述されることに違和感を持ったものの，複素解析がもたらした物理・数学の拡がりを考えると，「複素解析的世界」に入っていければ様々な視界が開けるような気がします．　　(T)

数　理　科　学　10月号

2014 年 10 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　Ⓒ　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁